



UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL

**TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL
ALTERNATIVO APLICADO A CUBIERTAS**

*Trabajo de graduación previo a
la obtención del título de
Ingeniero Civil*

Autores:

Luis Alberto Ochoa Peralta

Paúl Fernando Orellana Ochoa

Director:

Ing. Juan Eugenio Carrión Monsalve, Ph.D.

Cuenca, Abril 2016

Resumen

El presente trabajo introduce el principio de la tensegridad como sistema viable para estructuras ligeras en nuestro medio y su aplicación enfocada a cubiertas de grandes luces.

La importancia de este trabajo académico está en la exploración de sistemas estructurales alternativos a los tradicionales generalmente usados. Una de las ventajas de la tensegridad es concebir grandes luces con pesos relativamente bajos en comparación con otros sistemas. La rigidez y estabilidad del sistema se logra debido a un pretensado inicial en los elementos estructurales.

La geometría es el aspecto más importante de una estructura. Existen diversas formas que pueden lograrse con el principio de tensegridad. Algunas opciones, propuestas en la literatura técnica, fueron analizadas. Se generaron modelos digitales para obtener una configuración geométrica adecuada. Se construyó un modelo a escala de la estructura propuesta con el fin de entender de mejor manera el comportamiento de estos sistemas.

Se realizó una revisión de la literatura de los métodos para: la búsqueda de forma, establecer la distribución y nivel de pretensado y el cálculo; guiados al diseño de estas estructuras. El procedimiento fue asistido por software como herramienta de cálculo.

Se establecieron las cargas y combinaciones de cargas para el dimensionamiento de los elementos (cables, barras) que constituyen la estructura propuesta.

Se analizó la viabilidad del proyecto en nuestro medio desde el punto de vista tecnológico, verificando la disponibilidad de los materiales para construir un proyecto de tales características.

Se llega a un diseño de la estructura para la aplicación, que cumple con los parámetros de servicio, duración y estabilidad. Se evidencian las ventajas y desventajas del sistema.

Palabras clave: Tensegridad, cubiertas de gran luz, búsqueda de forma, estructuras pretensadas, estructuras livianas.

Abstract

The present research work introduces the principle of tensegrity as a viable system for lightweight structures in Ecuador and its application to large span roofs.

The importance of this academic work is the exploration of alternatives to the traditional used structural systems. One of the advantages of tensegrity is to conceive large spans with relatively low weights in comparison with other systems. The stiffness and stability of the system is achieved due to an initial prestress of the structural elements.

Geometry is the most important aspect of a structure. There are several shapes that can be achieved with the principle of tensegrity. Some options proposed in the literature were analyzed. Digital models were generated to obtain a suitable geometric configuration. A scale model of the proposed structure was built in order to better understand behavior of these systems.

A literature review was conducted on methods for: form finding, distribution and calculation of level of prestress guided to the design of these structures. The procedure was assisted by software tools.

The viability of the project was analyzed in our country from the technological point of view, verifying the availability of the materials to construct a project of such characteristics.

A design of the structure was achieved for application, which complies with the service, duration, and stability requirements. The advantages and disadvantages of the system were shown.

Key words: Tensegrity, large span roofs, form finding, prestressed structures, lightweight structures.

Contenido:

Resumen	2
Abstract	3
1 Introducción.....	12
1.1 Introducción y Antecedentes	12
1.2 Justificación.....	14
1.3 Objetivos	15
1.3.1 Objetivo General.....	15
1.3.2 Objetivos Específicos	15
2 Marco Teórico	16
2.1 Definición	16
2.2 Inicios	18
2.3 Conceptos Fundamentales	19
2.3.1 Búsqueda de Forma	20
2.3.2 Indeterminación Estática y Cinemática	20
2.3.3 Mecanismos Finitos e Infinitesimales	21
2.3.4 Pretensado y Autotensado	22
2.3.5 Estabilización de Mecanismos Infinitesimales	24
2.3.6 Análisis de las Matrices de Equilibrio y de Compatibilidad	25
2.3.7 Matriz de Rigidez Tangente	28
2.3.8 Rigidez de un Sistema Reticular Pretensado	29
2.4 Estado del Arte.....	34
2.4.1 Métodos de Búsqueda de Forma.....	34
2.4.2 Métodos de Búsqueda del Pretensado.....	41
2.4.3 Tipos de Tensegridad	46
2.4.4 Aplicaciones.....	47
3 Metodología	53
3.1 Software	53
3.2 Modelos Digitales y Físicos.....	55
3.3 Prototipo.....	57
3.3.1 Geometría.....	57
3.3.2 Modelo Digital	58



3.3.3	Búsqueda del Pretensado	61
3.4	Modelos Físicos	67
3.4.1	Modelos Simples	67
3.4.2	Modelo del Prototipo.....	69
4	Diseño	77
4.1	Proceso de Diseño	77
4.2	Cargas.....	78
4.3	Propiedades de los Materiales	83
4.4	Estados Límite Considerados	86
4.4.1	Elementos a Compresión	87
4.4.2	Elementos a Tensión	89
4.5	Resultados y Análisis	90
4.5.1	Diseño de los Elementos	90
4.5.2	Nivel de Pretensado en los Elementos	92
4.5.3	Desplazamiento de los Nodos y Cargas Axiales en Estado de Pretensado.....	92
4.5.4	Desplazamientos de los Nodos Bajo la Acción de las Combinaciones de Cargas	95
4.5.5	Fuerzas Axiales en los Elementos Bajo la Acción de las Combinaciones de Cargas	96
4.6	Análisis no Lineal de Pandeo	98
5	Conclusiones.....	106
6	Bibliografía	108
7	Anexos	111
7.1	ANEXO A: Rigidez de un Sistema Reticular Pretensado	111
7.2	ANEXO B: Determinación de la Carga de Viento por el Procedimiento Direccional.....	117
7.3	ANEXO C: Programa en Matlab Para la Determinación de la Distribución de Pretensado Mediante el Método de la Doble Descomposición en Valores Singulares.....	120



Yo, *PAÚL FERNANDO ORELLANA OCHOA*, autor de la tesis “TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL ALTERNATIVO APLICADO A CUBIERTAS”, reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de INGENIERO CIVIL. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 05 de Abril del 2016



PAÚL FERNANDO ORELLANA OCHOA

C.I: 010646678-2



Yo, *LUIS ALBERTO OCHOA PERALTA*, autor de la tesis "TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL ALTERNATIVO APLICADO A CUBIERTAS", reconozco y acepto el derecho de la Universidad de Cuenca, en base al Art. 5 literal c) de su Reglamento de Propiedad Intelectual, de publicar este trabajo por cualquier medio conocido o por conocer, al ser este requisito para la obtención de mi título de INGENIERO CIVIL. El uso que la Universidad de Cuenca hiciere de este trabajo, no implicará afección alguna de mis derechos morales o patrimoniales como autor.

Cuenca, 05 de Abril del 2016



LUIS ALBERTO OCHOA PERALTA

C.I: 010546063-8



Universidad de Cuenca
Clausula de propiedad intelectual

Yo, PAÚL FERNANDO ORELLANA OCHOA, autor de la tesis "TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL ALTERNATIVO APLICADO A CUBIERTAS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 05 de Abril del 2016



PAÚL FERNANDO ORELLANA OCHOA

C.I: 010646678-2



Universidad de Cuenca
Clausula de propiedad intelectual

Yo, LUIS ALBERTO OCHOA PERALTA, autor de la tesis "TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL ALTERNATIVO APLICADO A CUBIERTAS", certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 05 de Abril del 2016



LUIS ALBERTO OCHOA PERALTA

C.I: 010546063-8

Dedicatoria:

Quiero dedicarles todo el esfuerzo puesto en el presente trabajo y durante toda la carrera de Ingeniería a mis padres Fernando y Elsa y a mis hermanos Esteban, Carlos y Diego por el apoyo y cariño infinitos que me demuestran cada día. Les estaré eternamente agradecido.

Paul F. Orellana Ochoa

Quiero dedicar toda la dedicación y esfuerzo en estos años universitarios a Dios y a mis padres, Manuel Gómez y Cecilia Peralta, tenerlos en mi vida fue el mejor apoyo, de manera igual especial a Emanuel Cabrera y Sonia Celleri que me apoyaron mucho y a quienes debo una gratitud infinita y a toda mi familia.

Luis A. Ochoa P.

Gracias.

Una meta es solo un paso más al éxito.



Agradecimientos:

Queremos agradecer a todas las personas que nos apoyaron en el transcurso de estos años, desde los inicios en las aulas universitarias hasta la culminación de esta estupenda carrera.

Manifestamos un agradecimiento especial al Ing. Juan Carrión Monsalve Ph.D. por los conocimientos impartidos, el tiempo y esfuerzo que nos brindó desde sus clases impartidas hasta la culminación de este trabajo.

A los profesores, compañeros y amigos de la prestigiosa Facultad de Ingeniería que nos acompañaron en todos estos años universitarios.

Y una inmensa gratitud a nuestras familias por el apoyo y cariño brindado.

1 Introducción

1.1 Introducción y Antecedentes

Una estructura constituye un sistema en tensegridad si se encuentra en un estado de autoequilibrio estable, formado por elementos que soportan compresión aislados unos de otros y elementos que soportan tracción. En las estructuras de tensegridad, los elementos sometidos a compresión suelen ser barras, mientras que los elementos sometidos a tracción están formados por cables. El equilibrio entre esfuerzos de ambos tipos de elementos dota de forma y rigidez a la estructura. Esta clase de construcciones combina amplias posibilidades de diseño junto a gran resistencia, así como ligereza y economía de materiales.

Los primeros ejemplos que se pueden denominar estructuras de tensegridad fueron realizados por el artista ruso Karl loganson, presentados en la Exhibición de Obmokhu – Rusia, en 1921. En 1920, en su estudio del equilibrio, ahora perdido y sólo conocido por fotos y descripciones, loganson equilibra tres postes inclinados que no se tocan y trabajan a compresión con una cuerda continua tensada que une los postes de vértice a vértice (Burkhardt, 2004).

En la década de los 40, durante el año 1948 el joven artista llamado Kenneth D. Snelson elaboró una pequeña escultura nunca antes vista a la que llamo “Early X piece” basada en dos X de madera unidas con nylon de tal manera que estas no se tocan entre sí. Este modelo generó en la mente del famoso inventor y artista Richard Buckminster Fuller un principio que posteriormente denominaría “tensegrity” (García Barreno, 2009).

El término “tensegrity”, en español tensegridad, se forma de la contracción de las palabras “tensional integrity” que se traducen como integridad tensional, es decir que los elementos sometidos a tensión que conforman la estructura son los responsables de generar una forma única y a su vez de dar un equilibrio a la misma (García Barreno, 2009).

Desde que se vio por primera vez la early X piece y se escuchó del termino tensegridad en el campo de la escultura hasta que fue introducido en el campo de la arquitectura y la ingeniería tuvieron que pasar varios años. Surgieron muchas definiciones planteadas por autores de acuerdo a sus propias conclusiones e investigaciones, pero todos llegan a un punto en común; compresión en barras generada por la tensión de cables que produce un orden de los elementos en una forma única. Para establecer la tensegridad en el campo de la ingeniería, específicamente en el campo de las estructuras, se utilizará la definición de Pugh debido a su claridad:

“Un sistema tensegrítico se establece cuando un conjunto de elementos a compresión discontinuos interactúa con un conjunto de elementos a tracción continuos para definir un volumen estable en el espacio” (Pugh, 1976).

Una definición basada en las propiedades matemáticas del sistema es la siguiente:

“Una tensegridad es un conjunto ordenado finito de puntos en un espacio euclídeo, con una determinada configuración, de los cuales ciertos pares de esos puntos, llamados cables, están obligados a no separarse, y el resto de pares de esos puntos, llamados barras, están obligados a no unirse” (Charalambides, 2004).

Desde el punto de vista estructural la tensegridad ha demostrado algunas características similares a todas las estructuras pretensadas, tales como redes de cables y membranas estructurales.

Una característica principal de las líneas de compresiones de las estructuras de tensegridad es su discontinuidad, es por ello que se las conoce como “estructuras de compresión flotante” o como lo describe Richard B. Fuller son “islas de compresiones en un mar de tracciones”.

Desde los primeros estudios centrados en las estructuras tensegríticas, el empleo del sistema en grandes obras de ingeniería ha revolucionado técnicas constructivas y de diseño, muchas de dichas obras sirvieron de plataforma para otras posteriores, entre las más importantes se destacan:

“The Needle Tower”, Figura 1.1, obra del escultor Kenneth Snelson en el año 1968, es una torre cónica de aluminio y acero inoxidable que da muestra de la tensegridad pura por su visible integridad estructural debido a la tensión de los cables, actualmente se encuentra fuera del Museo Hirshhorn y Jardín de las Esculturas en Washington.

“Georgia Dome”, inaugurado el 1 de marzo de 1992 se convirtió en la cubierta más grande del mundo con dicha tipología estructural con un largo de 234 metros y un ancho de 185 metros, cubriendo un área de 37200 m². A pesar de que no se trata de tensegridad pura debido a que se ancla en un anillo de hormigón, los cables tiran de los postes con igual fuerza en todas direcciones para formar fuertes triángulos tensos lo que en sí enuncia el principio del sistema.

“Kulirpa Bridge”, Figura 1.2, inaugurado el 4 de octubre de 2009 para uso peatonal sobre el río Brisbane en Australia, es el puente de tensegridad más grande del mundo. El equilibrio de los componentes de tensión y compresión crea una estructura ligera increíblemente fuerte, tiene 470 metros de largo con un tramo principal de 128 metros de luz libre.

Los sistemas en tensegridad agregan un alto valor arquitectónico a las estructuras resultantes, la estética elegante de estas estructuras es notable. En la actualidad el empleo de la tecnología y de mejores prácticas constructivas

aplicables a esta tipología estructural ha permitido muchos avances, y cada vez son más los usos dados a dicho principio.

En el presente estudio se pretende explorar esta reciente tipología de estructuras en el campo de la ingeniería civil, introducir al medio y dar a conocer la tensegridad como una posibilidad de construcción en el país, específicamente en el diseño de cubiertas. Las cubiertas tensegríticas permiten grandes luces con un peso liviano en comparación con otros sistemas estructurales. Se pretende evidenciar las ventajas del sistema y sobretodo que el estudio sirva como una antesala a nuevos proyectos con tipologías nuevas en el medio, innovando más allá de los límites actuales en la construcción.



Figura 1.1 The Needle Tower, Museo Hirshhorn y Jardín de Esculturas, Washington



Figura 1.2 Kurilpa Bridge, Australia.

1.2 Justificación

Uno de los problemas que afronta la ingeniería civil es la necesidad de cubrir grandes luces sin apoyos intermedios y así aprovechar al máximo el espacio cubierto, tal es el caso de estadios, coliseos, teatros entre otros. La tensegridad brinda una solución interesante a dicho problema con una ligereza global de la estructura así como también el ahorro de materiales.

En la actualidad en el Ecuador los métodos y tipologías utilizadas para dar respuesta a la necesidad de cubiertas de luces grandes son las convencionales usadas por mucho tiempo. Se expone y se pretende introducir la tensegridad como sistema estructural alternativo válido e innovador en nuestro medio.

Una estructura y su forma se relacionan de manera única, es decir, la una afecta directamente a la otra y viceversa. De este modo, cualquier cambio en la apariencia final implica un cambio en el comportamiento de la estructura. Esto evidencia la interacción que debe existir entre la Ingeniería y la Arquitectura. La tensegridad combina perfectamente estos dos campos ya que la forma responde directamente a razones estructurales, los elementos se orientan de modo que sus ejes coinciden con las trayectorias de los esfuerzos. Las estructuras resultantes tienen además un gran valor estético.



1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Exponer la tensegridad como alternativa en el campo de la ingeniería estructural en nuestro medio a través del estudio y diseño de una cubierta utilizando este sistema.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Definir una configuración geométrica apta para la aplicación propuesta.
- Realizar una propuesta de diseño.
- Evidenciar las ventajas y desventajas del sistema.
- Construir un modelo a escala de una cubierta en tensegridad.

2 Marco Teórico

2.1 Definición

El término original planteado por Buckminster Fuller, “tensegrity”, proviene de la contracción de las palabras: “tensional Integrity” (Fuller, 1962). Entonces parece lógico que su análogo en español resulte de la contracción de “integridad” y “tensional”; si además, para conseguir similitud fonética, se respeta el orden de las palabras propio del inglés, se obtiene “tensegridad” (Jáuregui, 2007). Varios textos en español usan el término “tensegrítico/a” como adjetivo para denotar a estructuras o sistemas que se encuentran en tensegridad.

Varias definiciones se han planteado a través de los años por investigadores que trataron el tema desde distintas disciplinas, desde lo completamente artístico, pasando por la arquitectura hasta la ingeniería de estructuras. Si bien estas definiciones tienen puntos en común, cada una resalta las cualidades de la tensegridad desde su propia perspectiva. De este modo, todas las definiciones se complementan para dar una visión general del concepto y de sus potenciales aplicaciones. Díaz (Díaz Herrada, 2014) y Blanco (Blanco Blanch, 2010) presentan una interesante recopilación de definiciones presentadas por diversos autores, entre las cuales están:

“Pequeñas islas de compresión en un mar de tensiones” (Fuller).

“Tensegridad describe un principio en el que la forma estructural está garantizada por un número finito cerrado, integral, con tensión continua en el sistema y no por las conductas exclusivamente locales de los miembros de compresión discontinua...” (Fuller).

“La reciente invención se refiere a una estructura novedosa y mejorada de elementos alargados que se colocan por separado, ya sea en tensión o en compresión para formar un entramado, los miembros de compresión están separados entre sí y los miembros de tensión están conectados entre sí para formar una red de tensión continua” (Snelson).

El conjunto se encuentra en un estado de auto tensión y es auto estable (Jáuregui, 2004). Esto implica que en ausencia de fuerzas o apoyos externos al sistema, las únicas cargas a las que se someten dichos elementos se deben al pre-esfuerzo que deben poseer para que el conjunto sea estable.

“Un sistema tensegrítico se establece cuando un conjunto de elementos a compresión discontinuos interactúa con un conjunto de elementos a tracción continuos para definir un volumen estable en el espacio” (Pugh).

Miguel de Guzmán, catedrático de Análisis en la Universidad Complutense de Madrid, trata la tensegridad desde la matemática:

“consideramos una configuración geométrica constituida por un número finito de puntos y por unos cuantos segmentos que unen estos puntos. Una estructura de tensegridad consiste en asignar vectores a los puntos, en las direcciones de los segmentos que concurren en ellos de forma que:

- La resultante en cada punto es nula.
- Para cada segmento, la suma de los vectores asignados a sus extremos es cero.

Para hacer esta definición Miguel de Guzmán establece una relación directa de la tensegridad y la teoría de la rigidez, lo que llama tensegridad es la teoría que se conoce como “self-stressed framework” (armazón auto-tensionado). La auto-tensión o tensión de equilibrio es una asignación de vectores a los vértices, en las direcciones de los segmentos que concurren en ellos, de forma que el estudio de la tensegridad de un armazón dado es equivalente al estudio de su rigidez infinitesimal, es decir, el estudio de “cierta aplicación lineal” (Santos Leal, 2006).

Dado un modelo de estructura decidir en qué posición admite una tensegridad, si es que la hay, requiere un estudio más complicado, para ello se usan los métodos “Form-finding” o de búsqueda de forma.

Desde el punto de vista del comportamiento estructural se resalta el hecho de que los elementos sometidos a tensión se encuentran en un estado de equilibrio estable, esto implica que la resistencia del elemento traccionado depende directamente de la resistencia del material, lo que permite usar la sección transversal mínima necesaria para que los esfuerzos no sobrepasen los admisibles por el material. Por otra parte, los elementos comprimidos son susceptibles de sufrir fenómenos de inestabilidad, específicamente pandeo, lo cual impide que se desarrolle toda la resistencia del material ante esfuerzos axiales y exige el uso de secciones de dimensiones mayores para dotar de mayor inercia al elemento, así la resistencia del elemento comprimido depende de su esbeltez la cual depende de su longitud.

Puede decirse que los elementos traccionados (cables) son más eficientes que los comprimidos, que generalmente son de acero con sección tubular. Esto se debe a que presentan una mayor relación resistencia-peso. En las estructuras tensegríticas esta ventaja se aprovecha al aislar los elementos comprimidos con distancias cortas lo que minimiza la susceptibilidad al pandeo. De este modo el peso de la estructura es relativamente bajo.

2.2 Inicios

Tres personas se consideran los inventores de la Tensegridad: Richard Buckminster Fuller, David Georges Emmerich y Kenneth D. Snelson. Todos ellos se atribuyen el descubrimiento, sin embargo Emmerich evidenció que el primer prototipo de sistema tensegrítico, denominado “Gleichgewicht konstruktion”, fue creado por Karl loganson (Jáuregui, 2007).

Karl loganson, artista ruso progresista, orientado a la tecnología y a la ingeniería, realizó los primeros ejemplos que se pueden denominar estructuras de tensegridad, presentados en la exhibición de Obmokhu – Rusia, en 1921. En 1920, en su estudio del equilibrio, loganson equilibra tres postes inclinados, que no se tocan y trabajan a compresión con una cuerda continua tensada que une los postes de vértice a vértice, Figura 2.1. El trabajo de loganson fue destruido a mediados de la década de 1920 por el régimen Soviético, pero existen registros como fotografías de la exhibición y descripciones de su obra (Burkhardt, 2004).

Kenneth Snelson, artista plástico, trabajó directamente con modelos a escala pequeña, de los que solo esperaba que se mantuvieran en pie por sí mismos y que soportaran la intemperie. Durante el año de 1948, el joven artista elaboró una pequeña escultura nunca antes vista a la que llamo “Early X piece”, Figura 2.2, basada en dos X de madera unidas con nylon de tal manera que estas no se tocan entre sí. Este modelo género en la mente del famoso inventor y artista Richard Buckminster Fuller un principio que posteriormente denominaría “tensegrity” (García Barreno, 2009).

Richard Buckminster Fuller, inventor de profesión, denominó “tensegrity” el sistema cuando a finales de la década de los 40 se desempeñara como profesor sustituto en el Black Mountain College en Carolina del Norte y tuviera al joven Kenneth Snelson como estudiante. Fuller escogió a Snelson como ayudante para la creación de modelos de estructuras geométricas que usaría en sus clases. Durante estas colaboraciones Snelson le presentaría su “Early X Piece” e inmediatamente Fuller vería el potencial del sistema (Díaz Herrada, 2014).

David Georges Emmerich, arquitecto, independientemente en Francia, en 1958, exploraba prismas tensegríticos y combinaciones de prismas en estructuras más complejas, las que denominó “structures tendues et autothédantes” (estructuras tensadas y autopretensadas) (Burkhardt, 2004). Como resultado, definió y patentó las llamadas “redes auto pretensadas”, que eran exactamente la misma clase de estructuras en las que estaban trabajando Snelson y Fuller al otro lado del Atlántico.

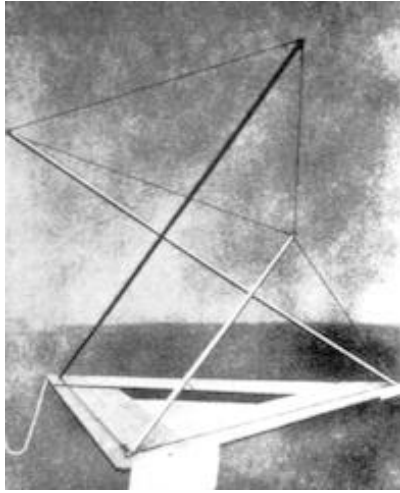


Figura 2.1 Escultura de Karl Moson.



Figura 2.2 Early X Piece de Snelson.

Fuller, Snelson y Emmerich, aplicaron a patentes durante la década de los 60 y continuaron desarrollando varios aspectos del principio, siendo Fuller el primero en obtener una patente. El principal interés de Fuller fue adaptar la tecnología al desarrollo de estructuras esféricas y domos con aplicaciones arquitectónicas en mente. Como arquitecto, Emmerich también estaba interesado en aplicaciones arquitectónicas. Snelson estaba interesado en la exploración artística de la tensegridad.

2.3 Conceptos Fundamentales

En esta sección se exponen definiciones claves para comprender el comportamiento mecánico de las estructuras en tensegridad, conceptos que servirán también como base a los métodos y modelos matemáticos que se tratarán posteriormente.

Temas como la geometría, rigidez y estabilidad de estas estructuras se tratan mediante los conceptos de: búsqueda de forma, indeterminación estática y cinemática, estados de pretensado y autotensado, mecanismos finitos e infinitesimales, estabilización de mecanismos infinitesimales, matriz de rigidez tangente, entre otros complementarios a los mencionados.

Al final de la sección se unifican estos conceptos mediante el análisis de la matriz de equilibrio estableciendo las bases conceptuales que gobiernan el comportamiento de los sistemas en tensegridad.

Las estructuras en tensegridad son un subconjunto de los sistemas reticulares articulados espaciales, esto implica que las fuerzas que pueden desarrollarse en los elementos, cuando las cargas se aplican sobre los nodos, pueden ser únicamente de tracción o de compresión. En las siguientes páginas cada vez que se use el término “estructura” o “ensamblaje” se hará referencia a estos sistemas, es decir, las conexiones serán articuladas lo que impide la transmisión de esfuerzos de tracción o torsión entre elementos.

2.3.1 Búsqueda de Forma

Form-finding en los textos en inglés, es el proceso que permite encontrar una configuración geométrica inicial factible, generalmente en ausencia de cargas externas. Constituye un paso clave en el diseño ya que no cualquier ensamblaje de barras y cables puede presentar un estado de pretensado y autoequilibrio además de mantener la rigidez unilateral de los elementos (barras comprimidas y cables tensados).

Este no es un campo exclusivo de las estructuras en tensegridad ya que el problema de encontrar una configuración inicial es también un tema a tratar en el estudio de otras estructuras tensionadas como redes de cables y membranas tensadas, sin embargo, en el caso de la tensegridad el proceso es en general más complicado (Schenk, 2005).

Es un campo que está en desarrollo, varios métodos teóricos se han planteado en las últimas décadas algunos de estos se basan en métodos que han sido usados con éxito en la determinación de formas iniciales de redes de cables y de membranas tensadas. El trabajo de Snelson basado en modelos físicos en pequeña escala para sus esculturas, un método de ensayo y error, es también considerado como un proceso de búsqueda de forma (Motro, 2006).

Algunos de los métodos toman en cuenta únicamente parámetros geométricos dando como resultado la forma de la estructura mientras que otros, adicionalmente, toman en cuenta parámetros de fuerza. Este segundo conjunto de métodos permite conocer, además de la geometría inicial, la distribución de fuerzas internas en los elementos, lo que se conoce como modo de pretensado.

2.3.2 Indeterminación Estática y Cinemática

Una estructura es estáticamente determinada si las ecuaciones de equilibrio son suficientes para encontrar las fuerzas internas y desplazamientos de la misma, sometida a la acción de cargas externas. Esta solución de las ecuaciones de equilibrio es única para un determinado conjunto de cargas externas. En cambio, una estructura es estáticamente indeterminada si tiene más elementos que los mínimos necesarios para garantizar la solución de las ecuaciones de equilibrio, en consecuencia admite más de una solución. Esto

implica también que la estructura puede contener formas de pretensado y sus elementos pueden estar esforzados incluso en ausencia de cargas externas (Schenk, 2005).

Una estructura es cinemáticamente determinada si cualquier movimiento de traslación o rotación del ensamblaje corresponde al de un sólido rígido, en otras palabras, se requiere adicionar energía al sistema para cambiar su geometría. Por el contrario, si la estructura es cinemáticamente indeterminada pueden existir variaciones de la geometría sin que fuerzas externas tengan que insertar energía en el sistema. Se dice entonces que la estructura entera o parte de esta constituye un mecanismo. Estos mecanismos se clasifican en finitos y en infinitesimales.

2.3.3 Mecanismos Finitos e Infinitesimales

Cuando se juntan elementos lineales rígidos formando un ensamblaje, la elección de las longitudes de los elementos y de la conectividad de los mismos puede provocar que la geometría de la estructura no esté definida por un solo conjunto de coordenadas de los nodos. Cuando se puede pasar de una geometría a otra sin la adición de energía en el sistema se dice que es cinemáticamente indeterminado.

Si el cambio de geometría no produce ninguna variación en la longitud de los elementos el mecanismo se conoce como *finito*. Por ejemplo el ensamblaje bidimensional mostrado en la Figura 2.3, compuesto por 4 barras conectando dos nodos fijos y dos nodos libres, puede asumir cualquiera de las configuraciones geométricas correspondientes a las posiciones de los nodos libres sobre las trayectorias circulares mostradas.

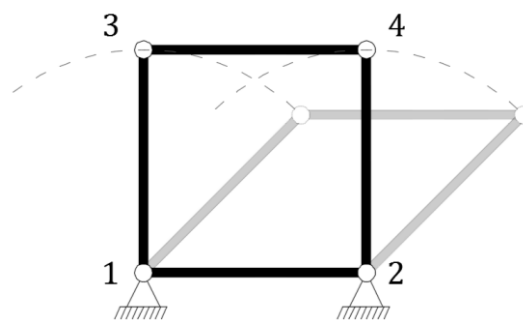


Figura 2.3 Ejemplo de mecanismo finito.

Si el cambio de geometría produce variaciones infinitesimales de la longitud en los elementos y además estas variaciones son de menor orden que el desplazamiento, el mecanismo se conoce como *infinitesimal*. La Figura 2.4 muestra un ensamblaje compuesto de tres nodos, uno libre y dos fijos, unidos por dos elementos colineales de igual longitud. Un desplazamiento del nodo 2, en la dirección perpendicular a la posición original de los elementos, activa un mecanismo infinitesimal. Para valores pequeños del desplazamiento d entre las

posiciones 2 y 2' el alargamiento de los elementos es menor que dicho desplazamiento.

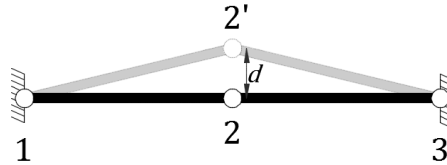


Figura 2.4 Ejemplo de mecanismo infinitesimal.

2.3.4 Pretensado y Autotensado

El estado inicial de una estructura en tensegridad no puede definirse solo con su geometría. En ausencia de cualquier carga externa los elementos que componen el ensamblaje están sometidos a fuerzas axiales internas debidas a un estado de pretensado. Este estado de pretensado genera la rigidez de estas estructuras mediante la estabilización de mecanismos infinitesimales.

Si tomamos como ejemplo la estructura hiperestática tridimensional mostrada en la Figura 2.5 compuesta de cuatro elementos lineales no coplanares que conectan a los nodos fijos 1, 2, 3, 4 (que pertenecen a un mismo plano) con el nodo libre 5 (fuera del plano de los otros nodos). Designando con d_{ij} a la distancia geométrica entre dos nodos i, j y con l_{ij} a la longitud inicial del elemento que conecta estos nodos, se puede inducir un pretensado en este ensamblaje haciendo que $l_{15} < d_{15}$. De este modo el elemento 1-5 tiene que ser forzado a encajar en su lugar entre los nodos 1 y 5 alargándolo hasta que su longitud alcance d_{15} . Si el límite elástico del elemento no se rebasa, éste intentará retomar su longitud original obligando a los nodos a acercarse, sin embargo, los otros elementos impiden que el nodo libre se mueva generando fuerzas que garantizan el equilibrio del nodo libre.

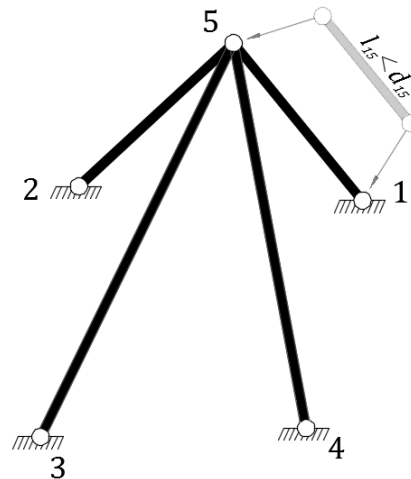


Figura 2.5 Estructura reticular pretensada.

A pesar de que la estructura de la Figura 2.5 no es una tensegridad, este sencillo ejemplo ilustra el hecho de que los elementos de una estructura pueden estar esforzados aún en ausencia de cargas externas al ensamblaje. También se puede concluir que la estructura debe ser hiperestática para poder asumir estados de pretensado. De no cumplirse esta última condición cualquier diferencia entre la longitud inicial del elemento y la distancia geométrica entre los nodos causara que la geometría cambie hasta ajustarse a la longitud inicial del elemento.

Motro (Motro, 2006) define este estado inicial como *pretensado* cuando se requieren de nodos fijos (apoyos) para generar el esfuerzo inicial de los elementos, como en la Figura 2.5. Si la estructura es capaz de presentar esfuerzos iniciales en sus elementos en ausencia de fuerzas externas y de nodos fijos este estado se denomina de *autotensado*. Un ejemplo bidimensional de este último estado se presenta en la Figura 2.6, la cual muestra un marco cerrado de elementos comprimidos cuyas diagonales son elementos traccionados, no se requiere de apoyos para inducir el esfuerzo inicial de los elementos.

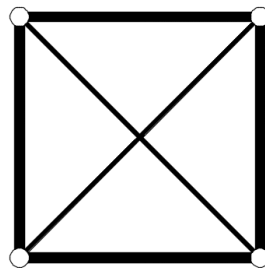


Figura 2.6 Estructura reticular autotensada.

2.3.5 Estabilización de Mecanismos Infinitesimales

Los mecanismos infinitesimales pueden estabilizarse mediante estados de pretensado o de autotensado, esto implica que si en un momento dado se aplica una carga que active el mecanismo y posteriormente dicha carga deja de actuar, este mecanismo regresa a su posición inicial.

Se expone este concepto retomando el ejemplo de la Figura 2.4. A este ensamblaje se le asignaran dos estados de pretensado, uno de tracción y otro de compresión.

Se puede inducir el estado de pretensado de tracción haciendo que $l_{12} = l_{23}$ y $l_{12} + l_{23} < d_{13}$, es decir que las longitudes iniciales de los elementos son menores que las distancias geométricas entre los nodos que conectan, Figura 2.7(a). Al aplicar una acción externa que active el mecanismo infinitesimal, Figura 2.7(b), la energía potencial del sistema crece, cuando la acción externa deja de actuar el sistema vuelve a la posición inicial, que es la de mínima energía potencial.

Desde otro punto de vista, distinto al energético, analizando el equilibrio del nodo desplazado por la acción externa, F , hasta la posición $2'$, se observa en la Figura 2.7(c) que las fuerzas axiales internas, t , en los elementos tienen una componente en dirección de F pero de sentido contrario. De este modo mientras más grandes sean las fuerzas de pretensado más grande será la rigidez del ensamblaje, deformado, ante la carga F y al quitar la acción el mecanismo retorna a su posición inicial.

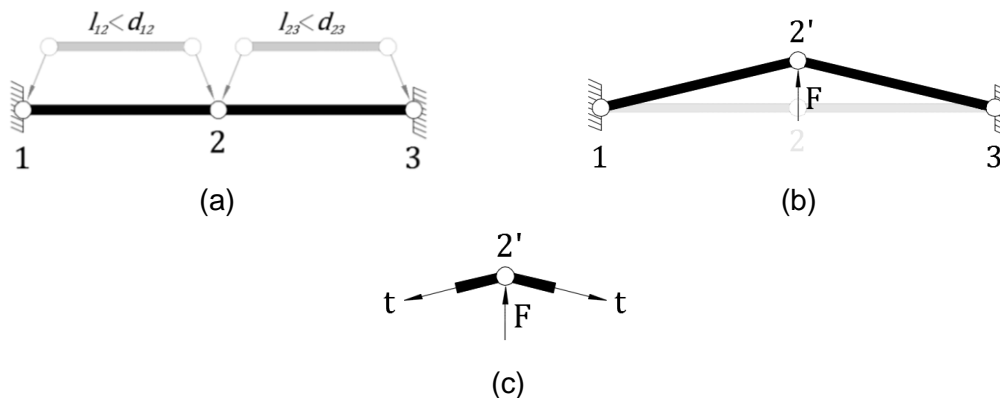


Figura 2.7 Estado de pretensado de tracción.

Se induce el estado de pretensado de compresión haciendo que $l_{12} = l_{23}$ y $l_{12} + l_{23} > d_{13}$, es decir que las longitudes iniciales de los elementos son mayores que las distancias geométricas entre los nodos que conectan, Figura 2.8(a). En este caso, el nodo intermedio se encuentra en un estado de equilibrio inestable y cualquier perturbación, en dirección perpendicular a la posición original de los elementos, Figura 2.8(b), genera que las fuerzas internas de los elementos alejen al nodo central de la posición 2 hasta la posición $2'$, Figura 2.8(c). En la nueva geometría que asume la estructura, en

ausencia de cargas externas, las fuerzas internas son nulas, es decir la longitud de los elementos en el ensamblaje es igual a su longitud inicial, $d_{12'} = l_{12}$ y $d_{2'3} = l_{23}$.

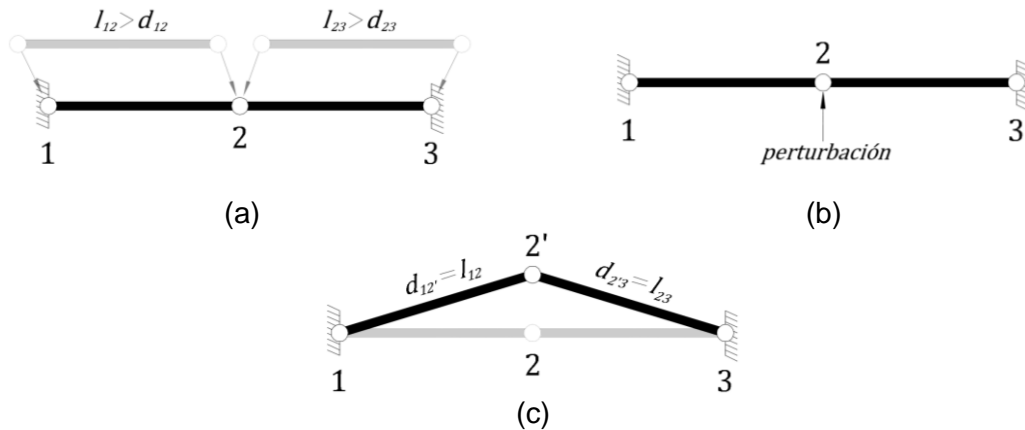


Figura 2.8 Estado de pretensado de compresión.

Este ejemplo se puede extender a estructuras tridimensionales y permite obtener una importante conclusión: no todos los estados de pretensado pueden estabilizar los mecanismos infinitesimales. También permite comprender por qué no es posible intercambiar los elementos de tracción y compresión en una estructura tensegrítica.

2.3.6 Análisis de las Matrices de Equilibrio y de Compatibilidad

La matriz de equilibrio A de orden $3n \times b$ de una estructura con b elementos y n nodos libres se define de modo que cumpla la siguiente igualdad:

$$At = f \quad (1)$$

en donde t de dimensión $b \times 1$ es el vector de fuerzas axiales internas de los elementos y f de dimensión $3n \times 1$ es el vector de fuerzas externas aplicadas en los nodos libres. Su definición expresa que en cada nodo la carga externa aplicada es equilibrada por la suma de las fuerzas axiales internas de los elementos que llegan al nodo.

Para determinar el estado tensional inicial de una estructura en tensegridad con geometría definida, las fuerzas externas aplicadas en los nodos libres son nulas, $f = 0$, por lo que la expresión (1) se transforma en:

$$At = 0 \quad (2)$$

El sistema de ecuaciones homogéneo (2) puede admitir dos tipos de soluciones, la solución trivial $t = 0$, o soluciones en función de uno o más parámetros independientes. Para que exista el segundo conjunto de soluciones el rango r de la matriz A debe ser menor que b y el número de parámetros

independientes, que es igual al número de soluciones independientes no triviales, es $b - r$.

De existir soluciones no triviales, estas forman un conjunto de vectores $[t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{b-r}]$ linealmente independientes y cualquier combinación lineal entre estos vectores también es solución de (2). Entonces la solución general de la ecuación puede expresarse como el subespacio vectorial de \mathbb{R}^b generado por dichos vectores y el conjunto generador $[t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_{b-r}]$ constituye una base del subespacio vectorial solución de dimensión \mathbb{R}^{b-r} . A éste espacio vectorial generado se le denomina espacio nulo de A y su dimensión $b - r$ es la nulidad de A .

Cada una de las soluciones independientes t_i de la ecuación (2) representa un conjunto de fuerzas axiales internas en los elementos que garantiza el equilibrio de los nodos de la estructura con geometría conocida, en ausencia de peso propio y cargas externas. A cada una de estas soluciones t_i se las conoce como modos de pretensado independiente (Yuan, Chen, & Dong, 2007) y sus componentes son positivas para los elementos traccionados y negativas para los comprimidos. Cuando no existen soluciones distintas de la trivial, la estructura no es pretensable. Si existe un solo modo de pretensado independiente este indica la distribución única de fuerzas con la que puede pretensarse la estructura. Si existen dos o más, cada uno indica una distribución válida y cualquier combinación lineal de estos también lleva a una distribución de autoequilibrio.

La matriz de compatibilidad C de orden $b \times 3n$ de una estructura cumple la siguiente condición:

$$Cd = e \quad (3)$$

en donde d de dimensión $3n \times 1$ es el vector de desplazamientos de los nodos libres y e de dimensión $b \times 1$ es el vector de deformaciones axiales de los elementos que conforman la estructura. Esta expresa la compatibilidad que debe existir entre el desplazamiento de los nodos y las deformaciones axiales de los elementos que llegan a los nodos.

Los desplazamientos nodales, que pueden ocurrir sin producir deformaciones axiales de los elementos, constituyen los mecanismos presentes en la estructura y satisfacen la ecuación (4).

$$Cd = 0 \quad (4)$$

El sistema de ecuaciones homogéneo (4), al igual que el (2), puede admitir soluciones paramétricas las cuales representan los modos de desplazamiento sin deformaciones axiales y por lo tanto, los mecanismos presentes en la estructura (cargas que no pueden ser equilibradas por la estructura en su configuración inicial) (Schenk, 2005).

En el análisis matricial de estructuras se demuestra que la matriz de compatibilidad C es la transpuesta de la matriz de equilibrio A , ecuación (5).

$$C = A^T \quad (5)$$

Las estructuras tensegríticas constituyen un subconjunto de los sistemas reticulares espaciales. En general para una estructura reticular espacial con b elementos y N grados de libertad, el número de modos de pretensado independiente s es:

$$s = b - r \quad (6)$$

en donde r es el rango de su matriz de equilibrio

y el número de mecanismos internos m viene dado por:

$$m = N - r \quad (7)$$

Despejando r en las ecuaciones (6) y (7) e igualándolas se tiene la siguiente expresión:

$$s - b = m - N \quad (8)$$

La expresión (8) se conoce como la regla extendida de Maxwell (Connelly, Fowler, Guest, Schulze, & Whiteley, 2009). Esta permite establecer una clasificación de los sistemas reticulares espaciales según sus propiedades estáticas y cinemáticas, Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Clasificación de los Sistemas Reticulares.

Tipo	r	s, m	Propiedades Estáticas y Cinemáticas
1	$r = b$ $r = N$	$s = 0$ $m = 0$	Sistemas estática y cinemáticamente determinados
2	$r = b$ $r < N$	$s = 0$ $m = N - r$	Sistemas cinemáticamente indeterminados
3	$r < b$ $r = N$	$s = b - r$ $m = 0$	Sistemas estáticamente indeterminados
4	$r < b$ $r < N$	$s = b - r$ $m = N - r$	Sistemas estática y cinemáticamente indeterminados

Las estructuras en tensegridad están dentro del tipo 4 en esta clasificación. Al ser sistemas estáticamente indeterminados admiten pretensado y al ser cinemáticamente indeterminados poseen mecanismos internos infinitesimales. En consecuencia, su estabilidad depende de que exista un modo de pretensado capaz de estabilizar los mecanismos internos presentes en la estructura, este modo de pretensado debe ser consistente también con la rigidez unilateral de los elementos que conforman la estructura tensegrítica.

La ecuación (2) constituye la base de un proceso que en la literatura se denomina “*force finding*” (búsqueda de fuerza) o “*prestress design*” (diseño de preesfuerzo). Mediante este proceso se determina el estado tensional inicial de la estructura, en ausencia de cargas externas. Este es otro paso esencial en el análisis de sistemas en tensegridad y como se mencionó antes puede ser solucionado al mismo tiempo que el de búsqueda de forma. Los métodos para este proceso se encuentran en desarrollo y existen propuestas de distintos autores.

2.3.7 Matriz de Rigidez Tangente

En el análisis matricial lineal estático de estructuras, estas se modelan estableciendo la relación entre las fuerzas f aplicadas en los nodos, y los desplazamientos d de estos nodos producidos por dichas fuerzas. Bajo la suposición de pequeñas deformaciones esta relación es lineal expresada por la ecuación (9) (Blanco Claraco, González, & García Ocaña, 2012).

$$f = Kd \quad (9)$$

En donde K se conoce como *matriz de rigidez* de la estructura la cual bajo la suposición mencionada es constante y depende de la geometría del ensamblaje y de las propiedades geométricas y mecánicas de los elementos que lo componen. Entonces, la solución del sistema de ecuaciones (9) permite encontrar los desplazamientos nodales asociados a las fuerzas externas aplicadas en los nodos. Mediante las relaciones de equilibrio, ecuación (1), y de compatibilidad, ecuación (3), se determinan las fuerzas axiales internas y las deformaciones de los elementos.

Para casos con desplazamientos nodales grandes, el comportamiento es no lineal y se introduce la llamada *no linealidad por geometría*. La matriz de rigidez se convierte en una variable dependiente de la geometría cambiante de la estructura. La determinación de los desplazamientos d para un estado de carga f dado se convierte en un proceso iterativo. En general, los métodos de solución de sistemas geoméricamente no lineales encadenan una serie de análisis de tipo lineal en cada etapa de iteración. La matriz K se reformula en cada iteración y se usa en la siguiente. De este modo en la iteración i se realiza un análisis lineal usando la matriz de rigidez reformulada en la iteración $i - 1$. Este proceso continúa hasta alcanzar algún criterio de convergencia y la exactitud de la solución es mayor mientras más iteraciones se usen. Esta matriz de rigidez que se reformula en cada paso de proceso se denomina *matriz de rigidez tangente*.

Las estructuras en tensegridad tienen un comportamiento geoméricamente no lineal, por lo que es necesario un análisis del tipo descrito en el párrafo anterior. Adicionalmente, en general las estructuras reticulares pretensadas presentan una respuesta estructural que depende de su estado de pretensado, éste

puede impartir rigidez al sistema, por lo que los efectos del pretensado deben tenerse en cuenta durante el análisis.

2.3.8 Rigidez de un Sistema Reticular Pretensado

El estudio de la rigidez de un sistema reticular pretensado se relaciona con conceptos propios de la teoría de la rigidez. Guest (Guest, 2006) presenta una deducción de la matriz de rigidez tangente de estructuras reticulares pretensadas. A continuación, se presentan los resultados del trabajo de Guest el cual inicia con la deducción de la matriz de rigidez tangente de un elemento individual mediante la diferenciación de las expresiones de equilibrio en los nodos con respecto a la posición de los mismos. Luego extiende esta deducción para obtener la matriz de rigidez tangente de una estructura. La deducción completa se presenta en el Anexo A.

Elemento Individual:

La Figura 2.9 muestra un elemento individual libre en el espacio. Las fuerzas \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 están en equilibrio con la tensión interna t en el elemento, \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 son vectores bidimensionales o tridimensionales con componentes f_{1i} y f_{2i} respectivamente. Los nodos conectados por el elemento tienen vectores de posición \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 bidimensionales o tridimensionales. El elemento en la configuración mostrada tiene una longitud l , y el vector unitario $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/l$ es paralelo al elemento.

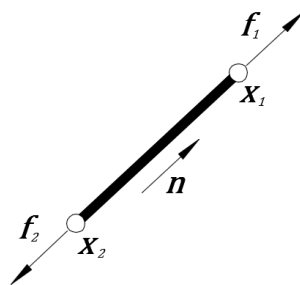


Figura 2.9 Diagrama de cuerpo libre de un elemento individual.

En la deducción se definen los siguientes parámetros: el *coeficiente de tensión* \hat{t} , ecuación (10), y la *rigidez axial modificada* \hat{g} , ecuación (11).

$$\hat{t} = \frac{t}{l} \quad (10)$$

$$\hat{g} = g - \hat{t} \quad (11)$$

en donde $g = dt/dl$ es la tasa de variación de la tensión con respecto a la longitud del elemento, es decir, su rigidez axial. Para un elemento lineal elástico de sección transversal A modulo elástico E y longitud inicial l_0 , suponiendo pequeñas deformaciones, se tiene que $\frac{dt}{dl} = \frac{AE}{l_0}$.

Usando los parámetros descritos, la matriz de rigidez tangente, del elemento individual, K_s que relaciona pequeños cambios en la posición de los nodos con pequeños cambios en las fuerzas nodales

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

se define como:

$$K_s = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -\mathbf{n} \end{bmatrix} [\hat{g}] [\mathbf{n}^T \quad -\mathbf{n}^T] + \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (13)$$

en donde I es la matriz identidad de orden 2×2 o 3×3 para el caso bidimensional o tridimensional respectivamente.

La ecuación (13) puede expresarse como:

$$K_s = \mathbf{a}_s [\hat{g}] \mathbf{a}_s^T + \mathbf{S}_s \quad (14)$$

en donde \mathbf{a}_s es la *matriz de equilibrio* del elemento individual

$$\mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -\mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (15)$$

y \mathbf{S}_s es la *matriz de esfuerzo* del elemento

$$\mathbf{S}_s = \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (16)$$

Estructura completa:

Se puede encontrar la matriz de rigidez tangente para la estructura completa por adición de las matrices de rigidez de los elementos individuales que la conforman. Para esto se requiere que las matrices de rigidez tangente de los elementos individuales estén planteadas en un sistema de coordenadas globales común a toda la estructura.

Para una estructura compuesta de n nodos se define el vector de fuerzas nodales externas \mathbf{f} y el vector de coordenadas nodales \mathbf{x} como:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (17)$$

en donde \mathbf{f}_i es el vector de fuerza bidimensional o tridimensional actuando en el nodo i , y \mathbf{x}_i es el vector posición bidimensional o tridimensional del nodo i .

Considerando un elemento p que conecta a los nodos i y j con longitud l_p , con una tensión interna t_p , un coeficiente de tensión \hat{t}_p , y que tiene una rigidez axial modificada \hat{g}_p . El vector unitario \mathbf{n}_{ij} paralelo al elemento p es:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{l_p} = -\mathbf{n}_{ji} \quad (18)$$

La matriz de equilibrio \mathbf{a}_p del elemento individual tiene todas las componentes cero excepto por aquellas correspondientes a los nodos i y j conectados por la barra p ,

$$\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{bmatrix}; \quad a_{pi} = \mathbf{n}_{ij}; \quad a_{pj} = \mathbf{n}_{ji} = -\mathbf{n}_{ij}; \quad a_{pk} = \mathbf{0} \text{ si } k \neq i \text{ y } k \neq j \quad (19)$$

La matriz de esfuerzos para el elemento individual p que conecta a los nodos i y j , en el sistema de coordenadas global, se puede definir en términos de submatrices $\mathbf{s}_{p_{lm}}$ de orden 2×2 en el caso bidimensional o de 3×3 en el tridimensional,

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} s_{p11} & s_{p12} & \cdots & s_{p1n} \\ s_{p21} & s_{p22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{pn1} & & & s_{pnn} \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde

$$s_{p_{ii}} = s_{p_{jj}} = \hat{t}_p \mathbf{I}; \quad s_{p_{ij}} = s_{p_{ji}} = -\hat{t}_p \mathbf{I}$$

en todos los demás casos $\mathbf{s}_{p_{lm}} = \mathbf{0}$.

La matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_p del elemento p se puede expresar en términos de las coordenadas globales retomando la forma de la ecuación (14):

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{a}_p [\hat{g}_p] \mathbf{a}_p^T + \mathbf{S}_p \quad (21)$$

Considerando una estructura formada por b elementos. La matriz de rigidez tangente total \mathbf{K} puede determinarse por la adición de las matrices de rigidez tangente de cada elemento:

$$\mathbf{K} = \sum_{p=1}^b \mathbf{K}_p = \sum_{p=1}^b \mathbf{a}_p [\hat{g}_p] \mathbf{a}_p^T + \sum_{p=1}^b \mathbf{S}_p \quad (22)$$

La cual puede expresarse en forma matricial:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{A}^T + \mathbf{S} \quad (23)$$

en donde \mathbf{A} es la matriz de equilibrio de toda la estructura

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_b] \quad (24)$$

$\hat{\mathbf{G}}$ es la matriz diagonal de rigideces axiales modificadas de los elementos,

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 & & & \\ & \hat{g}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{g}_b \end{bmatrix} \quad (25)$$

y \mathbf{S} es la matriz de esfuerzo de la estructura entera. \mathbf{S} puede ser definida en términos de submatrices \mathbf{s}_{lm} de 2×2 o 3×3

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \cdots & \mathbf{s}_{1n} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{s}_{n1} & & & \mathbf{s}_{nn} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Donde, para $l = m$,

$$\mathbf{s}_{ll} = \hat{t}_{ll} \mathbf{I}$$

y \hat{t}_{ll} es la suma de los coeficientes de tensión de todos los elementos que se conectan al nodo l , y para $l \neq m$,

$$\mathbf{s}_{lm} = -\hat{t}_{lm} \mathbf{I}$$

En donde \hat{t}_{lm} es igual al coeficiente de tensión en el elemento que conecta los nodos l y m si los nodos están conectados por un elemento o es cero si no lo están.

Las propiedades estáticas y cinemáticas de las estructuras en tensegridad las ubican dentro del tipo 4 en la clasificación mostrada en la tabla Tabla 2.1. Al ser sistemas estáticamente indeterminados admiten pretensado y al ser cinemáticamente indeterminados poseen mecanismos internos infinitesimales. En consecuencia, su estabilidad depende de que exista un modo de pretensado capaz de estabilizar los mecanismos internos presentes en la estructura.

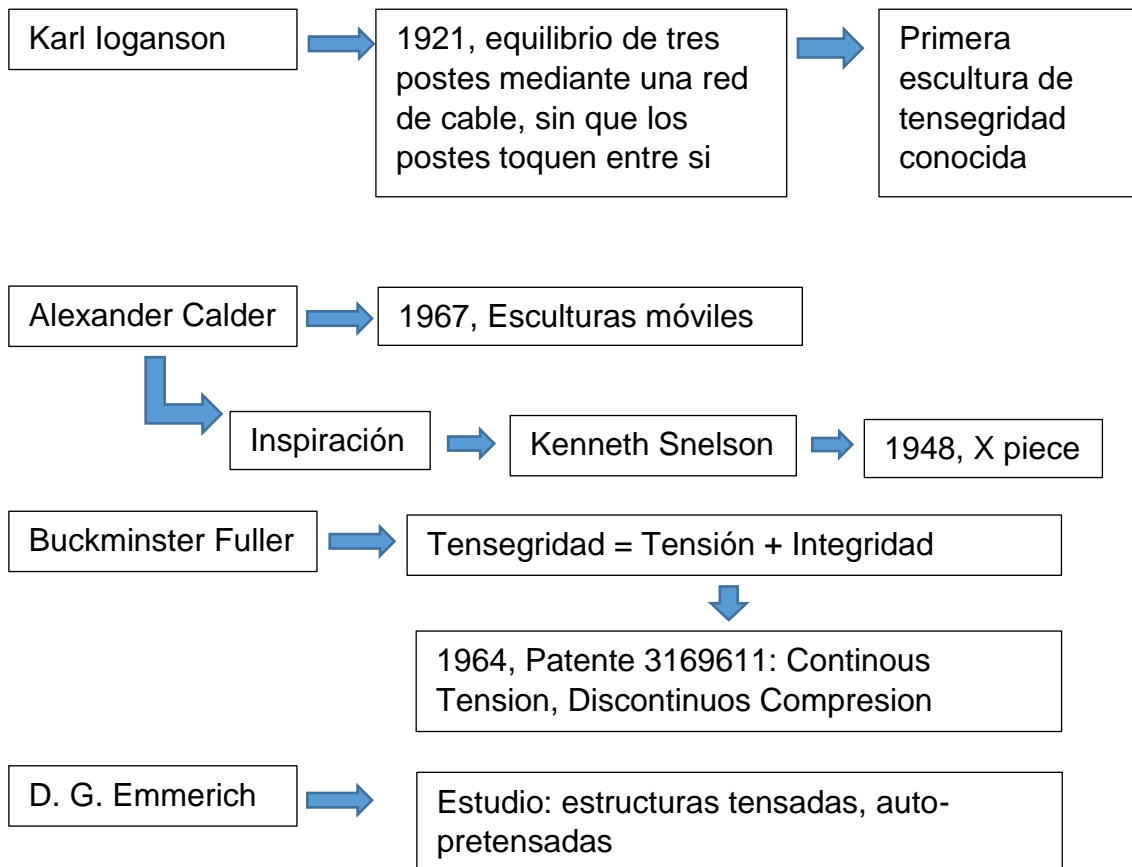


Los grandes desplazamientos nodales, causados por acciones externas, hacen que sea necesario un análisis del tipo no lineal por geometría para establecer el equilibrio del sistema. Adicionalmente, se deben tener en cuenta los efectos del estado de pretensado de la estructura.

La matriz de rigidez tangente, ecuación (23), constituye la base del modelamiento matemático numérico de los sistemas reticulares pretensados y por lo tanto, de las estructuras en tensegridad. Los conceptos de coeficiente de tensión, ecuación (10), rigidez axial modificada, ecuaciones (11) y (25), y de matriz de esfuerzos, ecuación (26), son los que permiten tener en cuenta los efectos del pretensado en el comportamiento de la estructura durante el proceso de análisis no lineal.

2.4 Estado del Arte

El siguiente cuadro presenta una cronología de los primeros trabajos realizados sobre tensegridad, estudios que fueron base para posteriores investigaciones.



2.4.1 Métodos de Búsqueda de Forma

Tibert y Pellegrino (Tibert & Pellegrino, 2011) presentan una revisión y clasificación de métodos de búsqueda de forma. Separan los métodos en dos grupos, los métodos *cinemáticos* y los *estáticos*. En cada uno de estos grupos se presenta una solución analítica de módulos tensegríticos básicos, estas soluciones analíticas se pueden plantear solo para casos con pocos parámetros. Cuando el número de parámetros es grande se usan otros métodos, algunos de los cuales sirven para encontrar formas completamente nuevas de tensegridad, mientras que otros requieren de una geometría inicial aproximada a la que se desea obtener al final del proceso de búsqueda de forma.

Métodos Cinemáticos de Búsqueda de Forma

Estos métodos emplean dos enfoques: el de mantener constante la longitud de los cables mientras que la longitud de las barras incrementa a un máximo, o el de mantener constante la longitud de las barras mientras la longitud de los cables se reduce a un mínimo.

El proceso de minimización de la longitud de los elementos tensados o de maximización de la longitud de los elementos comprimidos solo toma consideraciones geométricas, sin embargo es equivalente a la minimización de la energía potencial del ensamblaje.

Soluciones Analíticas:

Considerando un módulo simple que consiste en cables dispuestos en las aristas de un prisma regular, con barras que conectan los vértices del polígono inferior con los correspondientes del polígono superior. Dependiendo del número de vértices v y del desfase entre los vértices conectados por una barra, existe un ángulo de giro θ único entre el polígono superior e inferior (los cuales permanecen planos) para el cual se obtiene un sistema en tensegridad.

En una configuración inicial, el cable lateral es vertical y el ángulo horizontal entre los extremos de la barra es $2\pi i/v$, donde i es un entero menor que el número de vértices v . Luego se introduce un giro relativo entre los polígonos inferior y superior, designado por el ángulo θ , Figura 2.10.

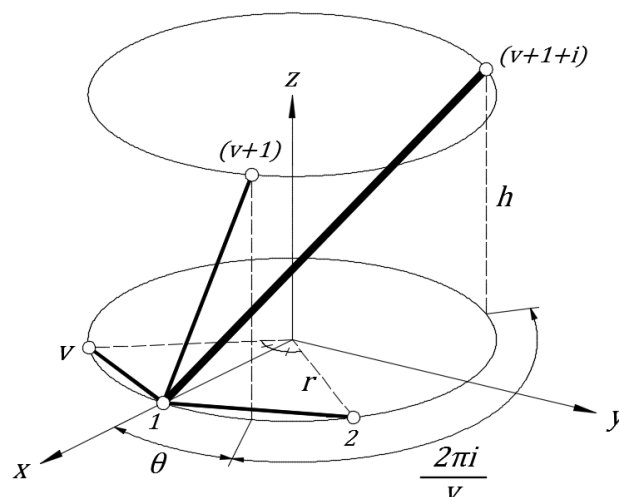


Figura 2.10 Elementos que se juntan en el nodo 1 de una estructura tensegrítica simple basada en un prisma de altura h y radio r , adaptado de (Tibert & Pellegrino, 2011).

En la configuración mostrada en la Figura 2.10, la longitud del cable diagonal l_c que conecta los nodos 1 y $(v + 1)$ está dada por la expresión (27); la longitud de la barra l_b que conecta los nodos 1 y $(v + 1 + i)$ es la de la expresión (28):

$$l_c^2 = 2r^2(1 - \cos\theta) + h^2 \quad (27)$$

$$l_b^2 = 2r^2 \left[1 - \cos \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) \right] + h^2 \quad (28)$$

Juntando las expresiones (27) y (28) y haciendo simplificaciones trigonométricas la longitud de la barra puede expresarse como:

$$l_b^2 = 4r^2 \sin \left(\theta + \frac{\pi i}{v} \right) \sin \frac{\pi i}{v} + l_c^2 \quad (29)$$

Para una longitud de cable l_c y un radio r dados, la longitud de la barra l_b es la máxima cuando:

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (30)$$

Este método es factible en estructuras con simetría que se pueden describir en términos de uno o dos parámetros. Para casos que no presenten estas características el número de variables requeridas para describir la configuración de la estructura es grande haciendo que la aplicación del método no sea práctica.

Programación no Lineal:

Este método trata la búsqueda de forma de una estructura tensegrítica como un problema de minimización restringido. Partiendo de un sistema con conectividad dada y coordenadas de los nodos conocidas, una o más barras son alargadas, manteniendo fijas las relaciones de longitud hasta llegar a una configuración en la que sus longitudes son máximas.

El problema general de minimización restringido está dado por:

Minimizar: $f(x, y, z)$

Sujeto a: $g_i(x, y, z) = 0$ para $i = 1, \dots, n$

Donde $f(x, y, z)$ es la función objetivo, por ejemplo, el negativo de la longitud de una de las barras y las funciones de restricción $g_i(x, y, z)$ son las longitudes fijas de los cables.

Ejemplo:

Un prisma triangular de; $v = 3$ y $i = 1$, tiene nueve cables de longitud $l_c = 1$ y tres barras de igual longitud. Una de las bases triangulares es fija, por lo tanto tres de estos seis nodos son fijos en el espacio. En coordenadas cartesianas, el problema tiene la forma:

Minimizar: $-l_{b1}^2$

$$\text{Para } \begin{cases} l_{c1}^2 - 1 = 0 \\ l_{c2}^2 - 1 = 0 \\ \vdots \\ l_{c6}^2 - 1 = 0 \\ l_{b2}^2 - l_{b1}^2 = 0 \\ l_{b3}^2 - l_{b1}^2 = 0 \end{cases}$$

Donde $c1, c2, \dots, c6$ denota los seis cables restantes y $b1, b2, b3$ las barras. Este problema puede ser resuelto usando la función de optimización restringida *fmincon* en Matlab. La longitud final de las barras es 1.468. Se puede comparar con el valor teórico de $\sqrt{1 + 2/\sqrt{3}} \approx 1.4679$ obtenido con las ecuaciones de la solución analítica.

En la implementación de este método se puede usar software de propósitos generales. El número de ecuaciones de restricción crece mientras más elementos conformen la estructura.

Relajación Dinámica:

Este método se ha usado satisfactoriamente en estructuras de cables y membranas. La técnica de relajación dinámica transforma un problema estático en uno dinámico ficticio, simulando una vibración amortiguada de la estructura. Se basa en la discretización de la estructura de modo que la masa de la misma se encuentre concentrada en cada nodo. Para una configuración inicial dada, se busca obtener el estado general de equilibrio de fuerzas el cual puede ser calculado por la integración de la siguiente ecuación dinámica:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f}, \quad (31)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz rigidez, \mathbf{M} la matriz de masas, \mathbf{N} una matriz de coeficientes de amortiguamiento, \mathbf{f} el vector de cargas externas, y $\ddot{\mathbf{d}}$, $\dot{\mathbf{d}}$, \mathbf{d} son los vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento para una configuración inicial respectivamente.

La convergencia es controlada por una apropiada elección de los coeficientes de amortiguamiento.

Métodos Estáticos de Búsqueda de Forma

En estos métodos se establece una relación organizada entre las configuraciones de equilibrio de una estructura con tipología dada y las fuerzas en sus elementos.

Soluciones Analíticas:

El equilibrio en los nodos y la simetría son aspectos que se aprovechan para obtener estas soluciones. Se retoma el caso de la Figura 2.10.

Se pueden usar los coeficientes de tensión de los elementos, \hat{t} , definidos en la expresión (10) para plantear el equilibrio del nodo al que estos se conectan. En la Figura 2.10 los elementos de la estructura se pueden separar en tres grupos por su simetría: los cables horizontales, como el que conecta los nodos 1 y 2, los cables diagonales, como el que conecta los nodos 1 y $v + 1$, y las barras. Designando como \hat{t}_h , \hat{t}_c y \hat{t}_b a los coeficientes de tensión de cada elemento respectivamente.

Analizando el nodo 1 en la Figura 2.10 se observa que en la dirección z las componentes de la tensión del cable diagonal y de la compresión en la barra deben igualarse para garantizar el equilibrio. Lo mismo ocurre en la dirección y ya que los cables horizontales tienen la misma tensión por lo que se anulan el uno al otro. Entonces se plantea el equilibrio en las direcciones z y y obteniendo las ecuaciones (32) y (33) respectivamente:

$$\hat{t}_c h + \hat{t}_b h = 0 \quad (32)$$

$$\hat{t}_c r \text{Sen} \theta + \hat{t}_b r \text{Sen} \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) = 0 \quad (33)$$

De las dos ecuaciones anteriores se obtiene que:

$$\hat{t}_c \left[\text{Sen} \theta - \text{Sen} \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) \right] = 0 \quad (34)$$

La solución de la ecuación (34) conduce a

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (35)$$

Solución que es idéntica a la obtenida en (30).

Método de la Densidad de Fuerza:

Este método fue inicialmente desarrollado por Schek (Schek, 1974) para estructuras de cables. Usa una estrategia matemática para transformar las ecuaciones de equilibrio no lineales de los nodos en ecuaciones lineales.

Si un elemento conecta los nodos i y j , inicio-fin, la *densidad de fuerza* de dicho elemento es la tensión del mismo dividida para su longitud $q_{ij} = t_{ij}/l_{ij}$.

Se observa inmediatamente que el concepto de densidad de fuerza es igual al de coeficiente de tensión definido en la expresión (10) por lo que los dos términos se usaran indistintamente en el presente trabajo. Este valor será positivo en elementos sometidos a tensión y negativo en los sometidos a compresión.

El fundamento del método se puede explicar planteando el equilibrio en la dirección x de un nodo i al que se conectan m barras. Si designamos como x_i a la coordenada en x del nodo i y como x_j a la coordenada en x del nodo j en el otro extremo de alguna de las barras ($j = 1, 2, \dots, m$), entonces la componente del vector unitario paralelo a la barra ij dirigido hacia el nodo i será $(x_i - x_j)/l_{ij}$. Designando como f_{xi} a la componente en x de la fuerza externa aplicada en el nodo i , el equilibrio en la dirección considerada viene dado por:

$$\sum_{j=1}^m t_{ij} \frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}} = f_{xi} \quad (36)$$

La cual usando la densidad de fuerza de cada barra, q_{ij} , se puede expresar como:

$$\sum_{j=1}^m q_{ij} (x_i - x_j) = f_{xi} \quad (37)$$

Expresiones equivalentes a la (37) se pueden plantear para las direcciones y y z .

Para una estructura general con b barras y n nodos se definen las siguientes matrices:

La *matriz de conectividad* C_s de orden $b \times n$, la cual contiene la información de la conexión entre los nodos, cada fila de esta matriz corresponde a uno de los elementos y cada columna a uno de los nodos. Si un elemento conecta a los nodos i y j la fila correspondiente a dicho elemento contiene $+1$ en la i -ésima columna y -1 en la j -ésima, mientras que todos los demás valores en esa fila son cero.

La *matriz de densidades de fuerza* Q de orden $b \times b$ es una matriz diagonal que contiene las densidades de fuerza de las b barras.

El vector de componentes de las fuerzas externas, es un vector que contiene las n componentes de las fuerzas externas aplicadas en los nodos en una dirección determinada, para la dirección x se denota como f_x .

El vector de coordenadas nodales para una dirección dada, contiene las n componentes en una dirección determinada de las coordenadas de los nodos, para la dirección x se denota como X .

Entonces para una estructura general la ecuación matricial del método de densidades de fuerza en la dirección x es:

$$C_s^T Q C_s X = f_x \quad (38)$$

Para las direcciones y y z se plantean expresiones equivalentes.

Si las coordenadas de k nodos son conocidas ($0 < k < n$), resulta conveniente descomponer C_s en:

$$C_s = [C_u \quad C_f] \quad (39)$$

En donde C_u es una matriz de orden $b \times n - k$ en la que cada columna corresponde a un nodo desconocido y C_f es la matriz de orden $b \times k$ cuyas columnas corresponden a los nodos fijos de coordenadas conocidas. Del mismo modo el vector de coordenadas X se descompone en X_u de componentes desconocidas y X_f de componentes conocidas. Entonces la ecuación (38) se reescribe en la siguiente forma:

$$C_u^T Q C_u X_u = f_x - C_u^T Q C_f X_f \quad (40.a)$$

Y en las otras direcciones:

$$C_u^T Q C_u Y_u = f_y - C_u^T Q C_f Y_f \quad (40.b)$$

$$C_u^T Q C_u Z_u = f_z - C_u^T Q C_f Z_f \quad (40.c)$$

En el proceso de búsqueda de forma la fuerza externa aplicada en los nodos se toma igual a cero. El proceso general para encontrar la configuración geométrica inicia con la elección de las densidades de fuerza para luego resolver las ecuaciones (40) con las que se obtendrán las coordenadas. Con dichas coordenadas se calcula la longitud de los elementos y con esta información sumada a la de las densidades de fuerza se encuentran las fuerzas internas de los elementos.

Para el caso de estructuras que constan solo de elementos tensados $C_u^T Q C_u$ es definida positiva lo cual implica que es invertible y tiene siempre una única solución (Vassart & Motro, 1999).

En el caso de estructuras con elementos traccionados y comprimidos $C_u^T Q C_u$ es singular, por lo tanto no posee inversa, y para que el sistema tenga solución válida dicha matriz debe tener una deficiencia de rango (nulidad) de al menos 4 para el caso tridimensional y de 3 para estructuras bidimensionales (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006). Si la deficiencia de rango o nulidad es igual a 1 todos los nodos se degeneran en un solo punto llamado punto base, si es igual a 2

los nodos permanecen en una línea, si es igual a 3 se forma un ensamblaje bidimensional y si es 4 se forma una estructura tridimensional.

Son estos requerimientos de rango expuestos en el párrafo anterior lo que complica la búsqueda de forma de las estructuras en tensegridad. Encontrar el conjunto de densidades de fuerza que produzcan la deficiencia de rango es el problema principal en este método al aplicarlo en estructuras tensegríticas.

Vassart y Motro exponen tres estrategias para encontrar un conjunto de densidades de fuerza válidas: un *método intuitivo* aplicable para estructuras con pocos elementos; un *método iterativo* las densidades de fuerza se evalúan y modifican en varias iteraciones hasta alcanzar los requerimientos de rango; un *método analítico* en el cual se analizan las matrices en forma simbólica, este puede considerarse como el método óptimo sin embargo es de difícil ejecución para estructuras con muchos elementos.

2.4.2 Métodos de Búsqueda del Pretensado

Encontrar la distribución de fuerzas internas iniciales de una estructura con geometría dada es un problema equivalente al de encontrar el espacio nulo de la matriz de equilibrio A del ensamblaje, es decir, encontrar la solución o conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $At = 0$. Adicionalmente se debe tener en cuenta la simetría del problema (si es que existe) y la rigidez unilateral de los elementos (barras en compresión y cables en tracción).

Una herramienta útil para encontrar el espacio nulo de una matriz A es la llamada *descomposición en valores singulares (SVD)* la cual es una factorización de la forma $A = U\Sigma V^T$ en la que U y V son ortogonales (Lay & Murrieta, 2012). Se presenta a continuación una descripción de esta descomposición, luego se presentan dos métodos propuestos en (Yuan et al., 2007) y (Z. Zhang, Dong, & Fu, 2008) para encontrar la distribución inicial de fuerzas internas en sistemas reticulares pretensados. Dichos métodos se basan en la SVD.

Descomposición en Valores Singulares:

Considerando una matriz A de orden $m \times n$ con rango r . La matriz tiene r valores singulares distintos de cero, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, los cuales son iguales a las raíces cuadradas de los valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ de la matriz $A^T A$ ordenados de mayor a menor, es decir $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Para la descomposición de la matriz A de $m \times n$ se define una matriz Σ de $m \times n$ que puede formarse de la siguiente manera:

$$\Sigma_{m \times n} = \begin{bmatrix} D_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \quad (41)$$

En donde D es una submatriz diagonal de orden $r \times r$ cuyos elementos de la diagonal son los valores singulares no nulos de A :

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_r \end{bmatrix} \quad (42)$$

Los demás elementos de la matriz Σ son cero.

Entonces la *descomposición en valores singulares* de la matriz A se define como:

$$A = U \Sigma V^T \quad (43)$$

En donde U de orden $m \times m$ y V de orden $n \times n$ son ortogonales. Las columnas de U se llaman vectores singulares izquierdos de A y las columnas de V se llaman vectores singulares derechos de A (Lay & Murrieta, 2012).

Ya que V es una matriz ortogonal se cumple que $V^T = V^{-1}$, por lo que la ecuación (43) puede reescribirse como:

$$AV = U \Sigma \quad (44)$$

Por la manera en la que se definió Σ , ecuación (41), las últimas $n - r$ columnas del producto $U \Sigma$ son todas iguales al vector nulo $\mathbf{0}$. Entonces si designamos como v_i al i -ésimo vector columna de V , se tiene que:

$$Av_i = \mathbf{0} \quad \text{para } r < i \leq n \quad (45)$$

Por definición los vectores v_i son un conjunto ortogonal de vectores linealmente independientes, por lo tanto v_i con $r < i \leq n$ forman una base ortogonal del espacio nulo de la matriz A .

De esta manera se puede encontrar la solución del sistema $At = \mathbf{0}$ a través de la SVD de la matriz A . La descomposición numérica en valores singulares es un conocido problema del álgebra lineal numérica y existen métodos iterativos rápidos que producen los valores y vectores singulares de A . Programas de cálculo matricial como Matlab permiten encontrar ésta útil descomposición.

Método de la Doble Descomposición en Valores Singulares:

Este método fue propuesto por Yuan Chen y Dong (Yuan et al., 2007). Planteado para encontrar la distribución de pretensado inicial de domos de cables, se puede extender al caso general de estructuras reticulares pretensadas.

Se usan los siguientes términos para definir las soluciones obtenidas en cada etapa del proceso:

Modo de pretensado independiente, T : un modo directamente obtenido de la solución del sistema $At = 0$. Es decir cumple con la condición de autoequilibrio.

Modo de pretensado integral, W : se obtienen de los modos de pretensado independiente, pero a diferencia de estos consideran la simetría de la estructura. Es decir los elementos en posiciones análogas tienen el mismo coeficiente de distribución.

Modo factible de pretensado integral: obtenido de la combinación lineal de los modos integrales de pretensado, cumple con la condición de la rigidez unilateral de los elementos, los cables en tracción y las barras en compresión.

El proceso inicia con la aplicación de la SVD directamente sobre la matriz de equilibrio A de una estructura con b elementos, para determinar los s modos de pretensado independientes T_i (iguales a v_i con $r < i \leq n$ en la ecuación 45).

El modo de pretensado integral puede expresarse como la combinación lineal de los modos de pretensado independiente, entonces se tiene que:

$$W = T_1\alpha_1 + T_2\alpha_2 + \cdots + T_i\alpha_i + \cdots + T_s\alpha_s \quad (46)$$

En donde α_i son constantes reales, llamadas también coeficientes de participación.

Según la simetría de la estructura los elementos en posiciones análogas se consideran como parte de un mismo grupo y poseen la misma fuerza de pretensado. Si los elementos de la estructura pueden agruparse en n grupos, W con b componentes puede expresarse de la siguiente manera:

$$W_{b \times 1} = [w_1 \ w_1 \ w_1 \ w_1 \ \cdots \ w_i \ w_i \ \cdots \ w_n \ \cdots \ w_n]^T \quad (47)$$

en donde w_i es el coeficiente de fuerza en el grupo i de elementos. $W_{b \times 1}$ puede expresarse como:

$$W_{b \times 1} = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_i \ \cdots \ e_n]_{b \times n} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (48)$$

En donde e_i de dimensión $b \times 1$ es un vector que contiene la unidad en todas sus componentes que corresponden a los elementos del i -ésimo grupo y cero en todas las demás componentes.

Usando estos vectores, la ecuación (46) y (48) se combinan obteniéndose:

$$\mathbf{T}_1 \alpha_1 + \mathbf{T}_2 \alpha_2 + \cdots + \mathbf{T}_s \alpha_s + (-\mathbf{e}_1 w_1) + (-\mathbf{e}_2 w_2) + \cdots + (-\mathbf{e}_n w_n) = \mathbf{0} \quad (49)$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial como:

$$\bar{\mathbf{T}} \bar{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} \quad (50)$$

En donde $\bar{\mathbf{T}}$ es una matriz de $b \times (s + n)$ definida como:

$$\bar{\mathbf{T}} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{T}_s \quad -\mathbf{e}_1 \quad -\mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad -\mathbf{e}_n] \quad (51)$$

y $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ es un vector con $(s + n)$ componentes definido como:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]^T \quad (52)$$

Al aplicar nuevamente la descomposición en valores singulares a la matriz $\bar{\mathbf{T}}$ de la ecuación (50) se obtiene:

$$\bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\mathbf{V}}^T \quad (53)$$

En donde la matriz $\bar{\mathbf{U}}$ de orden $b \times b$ contiene a los vectores singulares izquierdos de $\bar{\mathbf{T}}$, $\bar{\mathbf{V}}$ de orden $(s + n) \times (s + n)$ contiene los vectores singulares derechos de $\bar{\mathbf{T}}$ y $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ de orden $b \times (s + n)$ contiene los valores singulares no nulos de $\bar{\mathbf{T}}$ en su diagonal y ceros en todas las demás componentes.

Si el rango de la matriz $\bar{\mathbf{T}}$ es \bar{r} y designando como $\bar{\mathbf{v}}_i$ al i -ésimo vector columna de $\bar{\mathbf{V}}$ se deduce que:

$$\bar{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0} \quad \text{para } \bar{r} < i \leq s + n \quad (54)$$

Entonces $\bar{\mathbf{v}}_i$ con $\bar{r} < i \leq (s + n)$ son las soluciones $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ del sistema de ecuaciones (50). De estos vectores columna se obtienen los modos de pretensado integral \mathbf{W}_i formados de las componentes desde la $s + 1$ hasta la $s + n$ de los vectores $\bar{\mathbf{v}}_i$ con $\bar{r} < i \leq (s + n)$. Es decir la parte $[w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_n]^T$ de los vectores. Estos modos satisfacen la condición de que los elementos de un mismo grupo de simetría posean el mismo coeficiente de distribución de fuerza interna.

Si una estructura presenta un solo modo de pretensado integral y este cumple con la condición de que los cables estén sometidos a tracción mientras que las barras a compresión, éste es el modo factible de pretensado integral, si esta segunda condición no se cumple entonces la estructura no se puede pretensar. Si la estructura posee varios modos de pretensado integral $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_i$ con $i > 1$ el modo de pretensado integral factible se obtiene de la combinación lineal $\mathbf{W}_1 \beta_1 + \cdots + \mathbf{W}_i \beta_i$ de estos modos. Entonces se debe encontrar un conjunto de constantes $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i$ que haga que la combinación lineal de los modos de pretensado integrales cumpla con la condición de rigidez unilateral de los

elementos. En caso de que no exista tal conjunto entonces la estructura no admite pretensado para la condición de rigidez unilateral de los elementos.

Método de Deducción Lineal:

Zhang, Dong y Fu en (Z. Zhang et al., 2008) proponen un método iterativo para encontrar la distribución de fuerzas internas de la estructura. Este método se basa en el uso de la pseudoinversa A^+ de la matriz de equilibrio A de la estructura.

La pseudoinversa (o inversa de Moore-Penrouse) de la matriz A de orden $m \times n$ y rango r se basa en una *descomposición en valores singulares reducida* de la matriz (Lay & Murrieta, 2012).

Cuando Σ contiene filas o columnas de ceros se puede fraccionar las matrices U y V mediante submatrices de la siguiente manera:

$$U = [U_r \quad U_{m-r}] \text{ donde } U_r = [u_1 \quad \cdots \quad u_i \quad \cdots \quad u_r]$$

$$V = [V_r \quad V_{n-r}] \text{ donde } V_r = [v_1 \quad \cdots \quad v_i \quad \cdots \quad v_r]$$

u_i y v_i son los vectores columna de U y V respectivamente. Entonces U_r es de $m \times r$ y V_r es de $n \times r$. Por lo tanto la SVD de la matriz A resulta en:

$$A = [U_r \quad U_{m-r}] \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = U_r D V_r^T \quad (55)$$

$$A = U_r D V_r^T$$

La que se conoce como descomposición en valores singulares reducida de A . Debido a que D es una matriz diagonal con elementos distintos de cero, tiene inversa. Entonces la pseudoinversa de A se define como:

$$A^+ = V_r D^{-1} U_r^T \quad (56)$$

y es de orden $n \times m$. Una de sus principales propiedades es $A^+ A = I_{n \times n}$. Esta propiedad es la que se aprovecha para el planteamiento del método de deducción lineal.

El método se basa en las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$At = f \quad (57)$$

$$\Delta t = A^+ f \quad (58)$$

en las que \mathbf{t} representa una distribución arbitraria de fuerzas internas en los elementos de la estructura. Cada componente de \mathbf{f} representa el desbalance de las fuerzas internas de los elementos que se conectan a cada nodo. En el estado de autoequilibrio en ausencia de fuerzas externas $\mathbf{f} = \mathbf{0}$. $\Delta \mathbf{t}$ es la distribución de fuerzas internas, en la estructura, que equilibran las fuerzas \mathbf{f} producidas por el desbalance.

El proceso del método inicia con el planteamiento de una distribución inicial \mathbf{t}_0 de fuerzas internas. Esta distribución inicial al ser arbitraria no garantiza el autoequilibrio por lo que mediante la ecuación (57) se pueden calcular las fuerzas \mathbf{f} resultado del desbalance de las componentes de \mathbf{t}_0 en los nodos. El proceso iterativo se resume en los siguientes pasos designando con i al número de iteración:

Paso 1: con la distribución inicial \mathbf{t}_{i-1} se calculan mediante la ecuación (57) las fuerzas \mathbf{f}_i de desbalance en los nodos.

Paso 2: Si el vector \mathbf{f}_i es muy próximo al vector nulo, según algún criterio de convergencia, puede considerarse que \mathbf{t}_{i-1} es el modo factible de pretensado integral, en caso contrario el proceso continúa con el paso 3. Se puede usar el siguiente criterio de convergencia: que la componente de \mathbf{f}_i con el mayor valor absoluto sea menor que una tolerancia establecida.

Paso 3: Con \mathbf{f}_i se usa la ecuación (58) para calcular $\Delta \mathbf{t}$ que corresponde a la distribución de fuerzas internas que equilibran a \mathbf{f}_i . Entonces la nueva distribución de fuerzas se calcula $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_{i-1} - \Delta \mathbf{t}$ y el proceso se repite desde el Paso 1 tomando a \mathbf{t}_i como la nueva distribución inicial.

En la elección inicial de \mathbf{t}_0 se considera a priori la rigidez unilateral de los elementos.

Una vez determinado el modo factible de pretensado integral con los métodos expuestos (o con otro método) el último paso de la búsqueda de fuerza es la determinación del nivel de pretensado.

Debido a que el pretensado imparte rigidez al sistema es conveniente que sea de magnitud grande pero desde el punto de vista tecnológico (resistencia de los materiales, métodos constructivos) debe ser el mínimo posible. Estos dos factores deben balancearse para conseguir un nivel óptimo de pretensado.

El nivel de pretensado se determina sujeto a condiciones técnicas propias del diseño estructural, como deflexiones bajo condiciones de carga en servicio y la rigidez y resistencia de la estructura ante estados de carga última.

2.4.3 Tipos de Tensegridad

Abiertos: requieren de elementos adicionales para la estabilización y rigidez de la estructura, como: anillos, mástiles, entre otros.

Cerrados: las estructuras tensegríticas tal y como se las define, auto-estables y autotensadas, sin necesidad de elementos externos para su estabilidad y rigidez.

2.4.4 Aplicaciones

Desde que surgió la tensegridad su aplicación principal fue en esculturas, es dos décadas después que la tensegridad forma parte de la arquitectura y la ingeniería generando varias tipologías de estas estructuras y algunas aplicaciones llevadas a la práctica.

Esculturas:

Antes de que la tensegridad fuera considerada como un sistema estructural o tan solo fuera considerada dentro de la arquitectura y la ingeniería, este principio fue reproducido solo en esculturas, muchas de estas famosas esculturas fueron construidas por Snelson, siempre manteniendo el principio de compresión discontinua y tensión continua.

En general, los investigadores que dedicaron su tiempo a la tensegridad generaron esculturas con el fin de entender mejor el comportamiento de dicho principio y optimizarlo.

Esculturas como “The Needle Tower”, Figura 2.11, ya mencionada antes y “INDEXER II”, Figura 2.12, son muy importantes en la historia de la tensegridad por marcar puntos de inicio a los posteriores estudios del tema.

El INDEXER II fue un regalo de la clase de ingeniería de 1950 de la Universidad de Michigan, mástiles de acero inoxidable de gran tamaño se levantan por sobre la superficie como si flotaran todo debido al principio de tensegridad.



Figura 2.12 INDEXER II, actualmente se encuentra en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Michigan.



Figura 2.11 The needle tower, Museo Hirshhorn y Jardín de las Esculturas, Washington.

Torres:

La aplicación en Torres no ha tenido mucha amplitud, aun menos debido al hecho de que sus principales aplicaciones se han propuesto para torres de energía y antenas de comunicación, que, comparados con los métodos tradicionales con los que se construyen, hacer una en tensegridad es más complicado.



Figura 2.13 Ejemplo de Torre tensegrítica.

Cubiertas:

En la actualidad no existen aplicaciones de cubiertas de tensegridad pura, es decir que sean autoestables, como antes definimos, las cubiertas existentes estarían dentro del grupo de las tensegridades abiertas ya que requieren de elementos externos para su estabilización.

Aún se encuentra en discusión si son o no consideradas como tensegridades, pero debido a su geometría y forma, además del hecho de ser livianas y cubrir grandes luces, se usan para cubiertas de grandes complejos deportivos.

Tal es el caso del antes mencionado Georgia Dome, Figura 2.14, o del Estadio de la Plata en Argentina, Figura 2.15, en los que el domo tensegrítico se ancla en un anillo de compresión de hormigón y de acero, respectivamente. Esta tipología se denomina *domo de cables*.



Figura 2.14 Georgia Dome, Georgia, EEUU.



Figura 2.15 Estadio de la Plata, Ciudad de la Plata, Argentina.

Cubiertas de tensegridad pura han sido propuestas en estudios por Katherine A. Liapi y Jinman Kim de la Universidad de Texas, Austin. Liapi y Kim (Liapi & Kim, 2003) generaron un código matemático para el diseño de una cubierta tensegrítica abovedada, dicho código integra principios geométricos que permiten la generación automática de un modelo en 3D (Liapi, Kim, & Liu, 2004).



Figura 2.16 Modelo de cubierta en tensegridad de Liapi y Kim.

Domos de Cables:

David H. Geiger desarrollo el sistema de domo de cables basado en el principio de tensegridad, el mismo que lo combino con el sistema de aspensión propuesto por Fuller.

Geiger reemplazo los pesados anillos metálicos de la aspensión de Fuller por un sistema de barras y anillos sujetos por cables radiales que se auto-sustentaban a medida que se elevaban. Hasta su muerte en 1989, Geiger construyo cuatro domos circulares de estas características de hasta 120 metros de diámetro.

Posteriormente, el ingeniero suizo-norteamericano Matthys P. Levy, retoma las ideas de aspensión y aprovecha las ventajas de la triangulación para generar con las estructuras resultantes paneles de membrana en forma de paraboloide hiperbólico (García Zúñiga, 2011).

El peso ligero de las estructuras de barras y cables, tales como el domo de cables de Geiger, Figura 2.17, y el domo de cables de Levy, Figura 2.18, las hacen adecuadas para cubiertas de grandes luces. La tracción de los cables y la compresión de las barras componen este sistema con el pretensado inicial que genera un estado de auto-equilibrio. En otras palabras el pretensado inicial determinara la geometría única del domo de cables (L. Zhang, Chen, & Dong, 2007).

Los domos de cables fueron empleados por primera vez en el techo del gimnasio olímpico de Seúl (Geiger, Stefaniuk, & Chen, 1986), debido a sus formas innovadoras y peso ligero han llegado a ser populares como estructuras de cubierta de arenas, estadios, y centros deportivos en la últimas dos décadas. Otros domos de cables reconocidos son: Redbird Arena y el Suncoast Dome en los Estados Unidos, el Estadio de la Plata en Argentina, y el Tao-Yuan Country Arena en Taiwan. El domo de cables más grande construido es el Domo de Georgia diseñado para las olimpiadas de Atlanta en 1996.

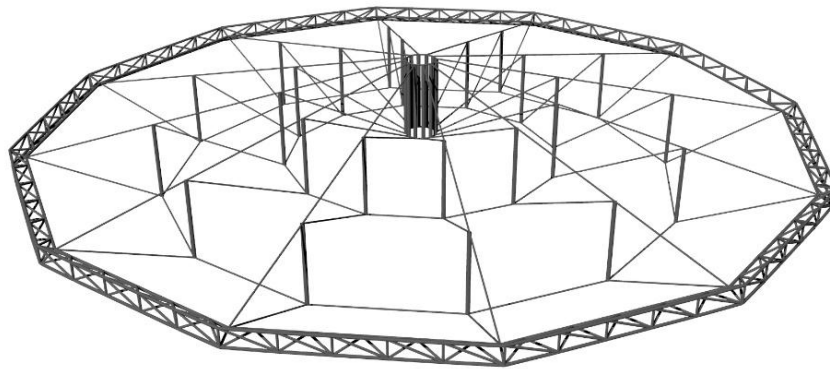


Figura 2.17 Domo de cables tipo Geiger.

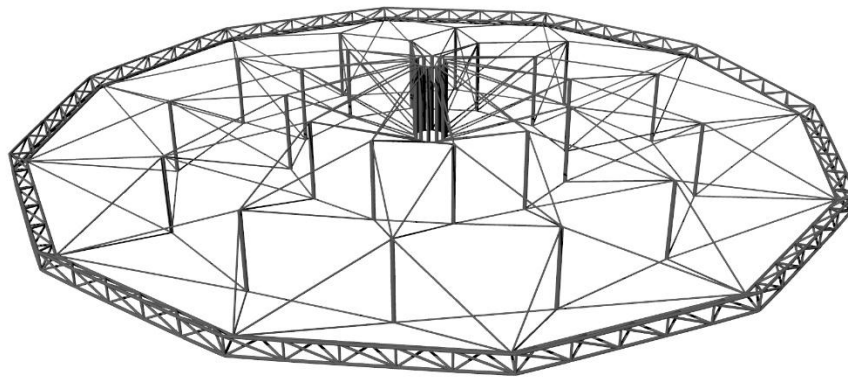


Figura 2.18 Domo de cables tipo Levy.

3 Metodología

Para el presente trabajo, la metodología empleada se fundamenta en una recopilación de información que abarca el tema central y demás ramales o subtemas, una extensa revisión bibliográfica y su posterior análisis, cuya información se complementa con la elaboración de un modelo físico y digital.

El análisis de la información recopilada se complementa con el uso de herramientas digitales que permiten reproducir geometrías que posteriormente tendrían su homólogo físico en modelos a escala.

En la etapa de elaboración del modelo físico a escala de la estructura de cubierta se tendrá en cuenta el uso de materiales que permitan reproducir el comportamiento de la estructura a una escala real, además de la disponibilidad de los mismos.

3.1 Software

En la actualidad las herramientas digitales han permitido el desarrollo a gran escala de proyectos, facilitando generar mayores avances optimizando el tiempo de desarrollo de los mismos, día a día los avances tecnológicos generan herramientas digitales de mayor alcance llegando cada vez a nuevos límites en la ingeniería en general.

Si bien un software sofisticado ayuda en el desarrollo de proyectos esto no sustituye a los conocimientos de las bases teóricas, que son indispensables para el uso de estas herramientas y la interpretación de los resultados que generan.

Un punto de partida para la elección del software de análisis fue la verificación de que el programa integre la capacidad de realizar un análisis del tipo no lineal por geometría teniendo en cuenta los efectos del pretensado en la estructura. Se presentó una introducción a este tipo de análisis en el capítulo anterior.

A continuación, se presenta una síntesis de la descripción de cada uno de los programas utilizados en el presente trabajo:

Autodesk AutoCAD

AutoCAD como lo indica sus siglas en inglés CAD (Computer Aided Desing) es un software para diseño asistido por computador, es utilizado para generar dibujos en 2D y modelos en 3D, es uno de los programas más usados por ingenieros y arquitectos.



En el presente trabajo de investigación se usó este programa para modelar la geometría de distintas tensegridades, desde modelos relativamente simples hasta la estructura de cubierta propuesta.

CSI Bridge

Es un software de la familia CSI (Computers and Structures, INC), integra las capacidades de modelado, análisis y dimensionamiento de superestructuras, como su nombre lo indica se orienta principalmente al diseño de puentes.

Otro software de la familia CSI orientado al diseño de estructuras es SAP 2000. Se usó Bridge debido a su capacidad de procesar geometrías complejas en menos tiempo que SAP, y tiene mejores opciones para el análisis de cables, que es un aspecto principal en la tensegridad.

Este software se utilizó en la etapa de diseño de la estructura propuesta en el presente trabajo.

ANSYS

Es un software de análisis por el método de los elementos finitos de propósito general. Sus siglas traducidas al español significan análisis de sistemas.

ANSYS está dividido en tres herramientas principales llamados módulos: pre-procesador (creación de geometría y mallado), procesador y post-procesador. Tanto el pre-procesador como el post-procesador están dotados de una interfaz gráfica.

Incluye análisis de tipo dinámico y estático, en ambos casos con análisis lineal y no lineal.

ANSYS se utilizó para el análisis no lineal de pandeo de la estructura y para comprobaciones de diseño.

Matlab

Es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio. Incluye amplias capacidades para operaciones matriciales.

Matlab se utilizó para obtener la distribución de pretensado de la estructura propuesta.

3.2 Modelos Digitales y Físicos

La revisión de bibliografía con el análisis de modelos y proyectos existentes, junto con ideas, conceptos y propuestas conllevó a que esta “mezcla” de ideas y conocimientos adquiridos permitan el planteamiento de una configuración geométrica, la misma que será base del estudio, análisis y posterior diseño.

Para iniciar con la exploración de formas de estructuras tensegríticas se partió por lo más sencillo, generando un modelo digital y posteriormente reproduciéndolo en un modelo físico a escala de un módulo basado en un prisma de base cuadrada, que consiste en cuatro elementos barra que no se tocan entre sí mientras una red tensada los une y auto-equilibra el sistema, Figura 3.1. Es un ejemplo simple de tensegridad que permitió entender de mejor manera el comportamiento de las mismas y tener una idea práctica del concepto.

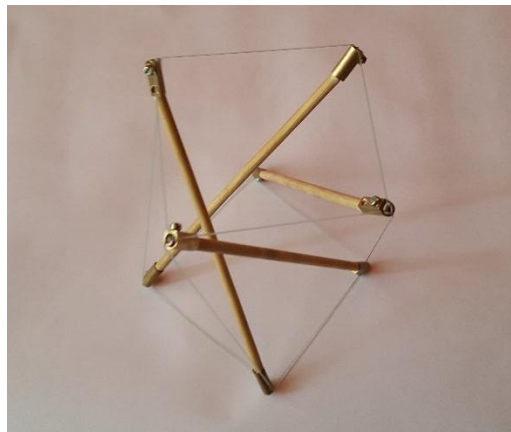


Figura 3.1 Módulo de tensegridad basado en un prisma de base cuadrada, 4 barras y 12 cables.

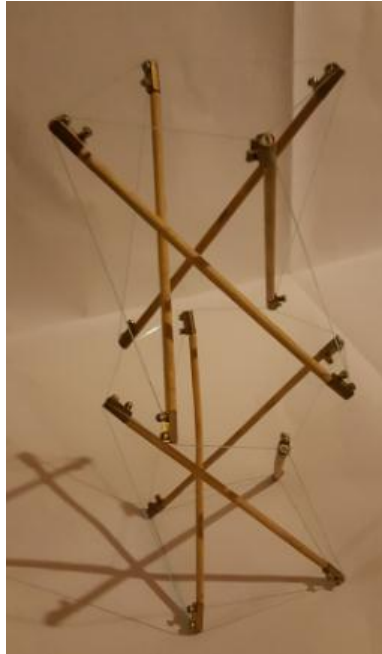


Figura 3.2 Agrupación de dos módulos, estructura con 8 barras y 24 elementos tensados.

A partir de la elaboración de un modelo, con un solo módulo, se puede continuar por generar otro modelo de mayor complejidad con un mayor número de elementos a compresión y más módulos individuales unidos para formar una estructura, Figura 3.2 y Figura 3.3.

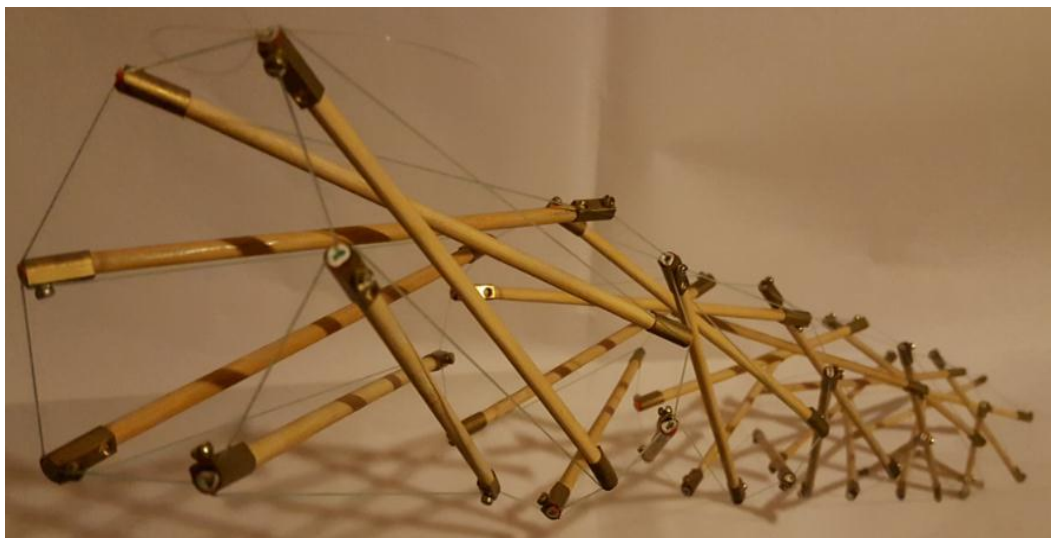


Figura 3.3 Extensión de módulos de 6 barras, estructura con 30 barras y 90 elementos tensados.

Para la elaboración de los modelos a escala se procedió a trabajar con madera de sección circular, la misma que cumple el trabajo de los elementos a compresión, para la red de tensión se usó nylon que posee la característica de

ser muy elástico lo que facilitó el ensamblaje. Para la conexión de los elementos se usaron terminales eléctricos que para el caso tenían la suficiente resistencia, los módulos elaborados no requieren de mayor precisión ya que sería sobre todo para apreciación de la geometría de la tensegridad de modelos simples.

Estos modelos sirvieron de base para entender el comportamiento de las estructuras tensegríticas, además de ser una plataforma para el siguiente paso, que es establecer una geometría apta para la aplicación en cubiertas, el tema central del presente trabajo.

3.3 Prototipo

Se describe la obtención de un modelo sobre el cual realizar el diseño. Se parte por la obtención de modelos digitales para posteriormente generar un modelo físico a escala que enfoque la geometría y comportamiento de la estructura a escala real.

3.3.1 Geometría

La geometría de cubiertas de tensegridad son variadas, en la revisión bibliográfica se encontró varias configuraciones geométricas de cubiertas algunas de las cuales son propuestas netamente geométricas cuyo comportamiento mecánico no se ha validado, paralelo a estas se encuentran los domos de cables que como se explicó en el capítulo anterior necesitan de un elemento externo para su estabilización, en este caso un anillo de compresión, Figura 3.4, por lo tanto en general se tratan de estructuras tensegríticas abiertas.

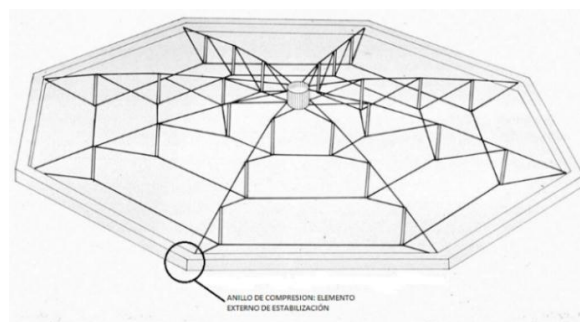


Figura 3.4 Anillo de compresión para la estabilización del domo de cables.

Para la propuesta de diseño del presente trabajo se eligió un domo circular de cables tipo Geiger, cuya configuración general es:

- Diámetro de 150 metros (luz libre).
- 3 anillos de cable internos y un anillo externo de compresión

- 12 elementos comprimidos en cada anillo traccionado y un elemento comprimido central.

3.3.2 Modelo Digital

La elección de la geometría inicia con modelos digitales en el programa AutoCAD, se plantearon varias configuraciones de geometría cuya inclinación de la cubierta fuera la mejor desde el punto de vista estético y constructivo. Se exploraron diferentes opciones presentadas en la Figura 3.5.

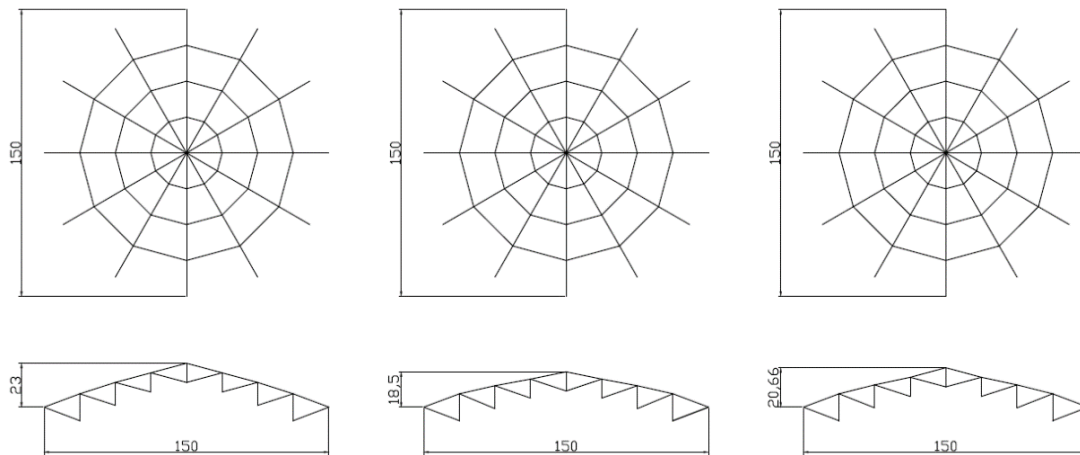


Figura 3.5 Propuestas geométricas.

La elección final fue la tercera opción, cuya configuración cumple con las características antes mencionadas.

La altura de la estructura es de veinte metros y setenta centímetros aproximadamente, para ello teniendo como parámetro inicial de ingreso en planta el diámetro del domo, 150 metros, partiendo de esto se generan los anillos interiores, continuando por ingresar los puntales y conformar la red de cables. La configuración y dimensiones de la estructura se muestran en la Figura 3.6 y Figura 3.7.

Debido a la configuración de la estructura sus elementos se pueden agrupar según su simetría. La Figura 3.8 muestra dicha agrupación con la designación de cada grupo de elementos y la Tabla 3.1 contiene las dimensiones longitudinales y la descripción de cada grupo. Esta nomenclatura se usará para hacer referencia a los elementos en el presente trabajo.

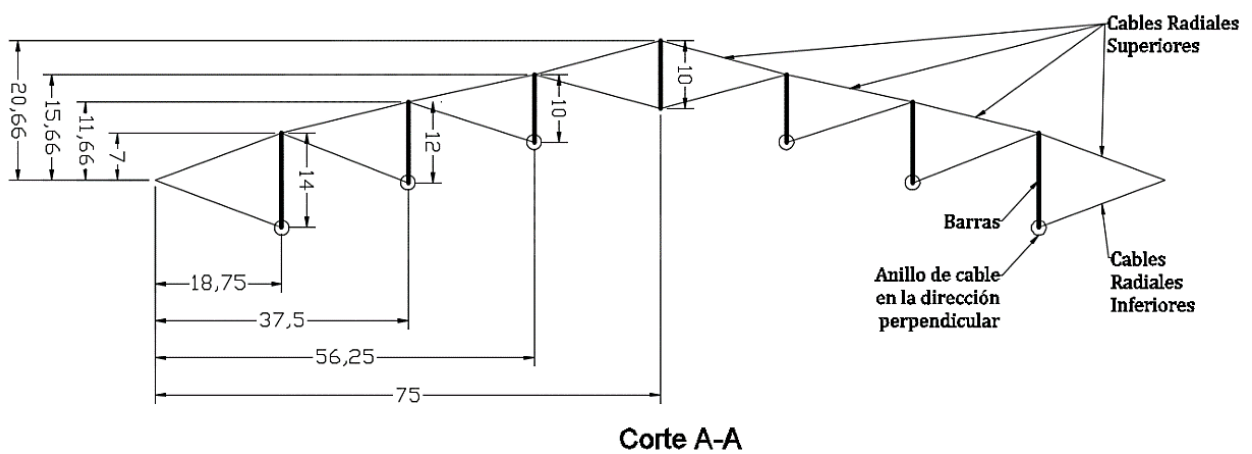
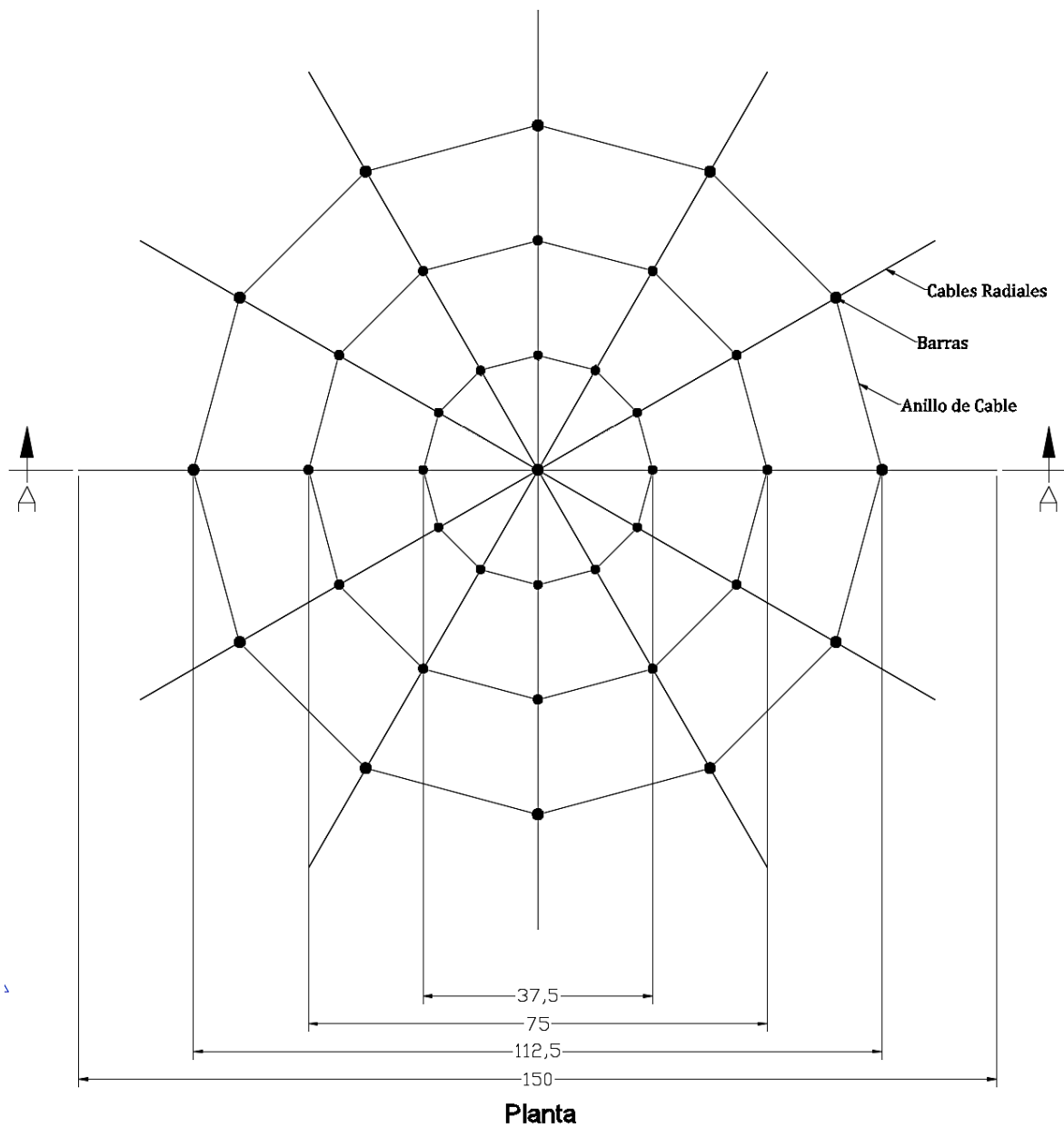


Figura 3.6 Vista en planta y corte de la estructura de cubierta.

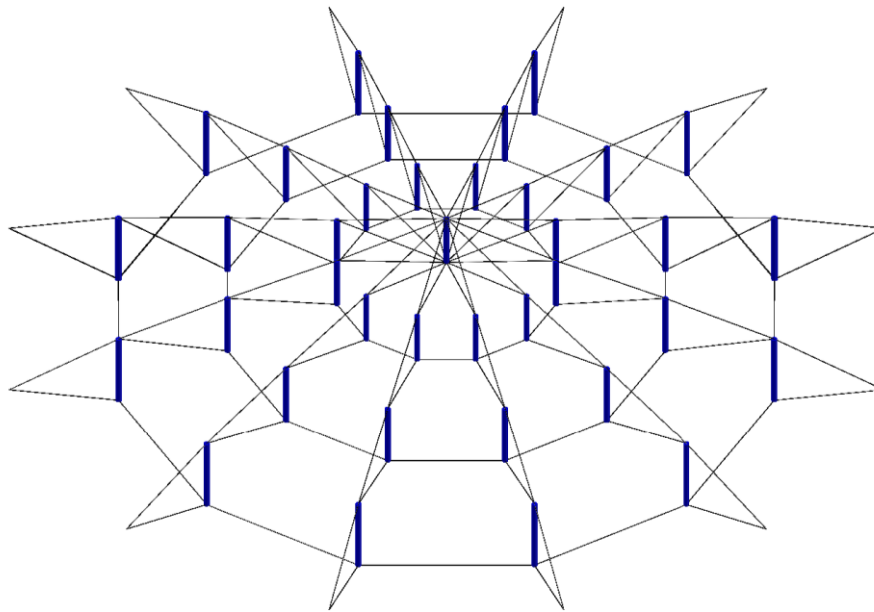


Figura 3.7 Perspectiva tridimensional de la estructura de cubierta.

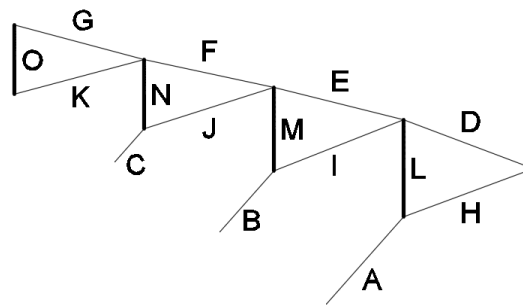


Figura 3.8 Grupos de simetría de la estructura.

Tabla 3.1 Longitud y descripción de los elementos para cada grupo de simetría de la estructura de cubierta.

Elemento	Longitud (m)	Descripción
A	29.12	Cable del anillo tensado exterior
B	19.41	Cable del anillo tensado intermedio
C	9.71	Cable del anillo tensado interno
D	20.01	Cable radial superior del primer ^a anillo
E	19.3	Cable radial superior del segundo ^a anillo
F	19.17	Cable radial superior del tercer ^a anillo
G	19.41	Cable radial superior central
H	20.01	Cable radial inferior del primer anillo
I	20.14	Cable radial inferior del segundo anillo
J	19.7	Cable radial inferior del tercer anillo
K	19.41	Cable radial inferior central
L	14	Puntal del primer anillo
M	12	Puntal del segundo anillo
N	10	Puntal del tercer anillo
O	10	Puntal central

- a. Los anillos primero, segundo y tercero se refieren al externo, intermedio e interno respectivamente.

3.3.3 Búsqueda del Pretensado

Una vez determinada la geometría de la estructura, el siguiente paso del análisis es la determinación del modo factible de pretensado integral, para esto se empleó el método de la doble descomposición en valores singulares, descrito en la sección 2.4.2.

Para este proceso se implementó un algoritmo en el lenguaje de programación Matlab cuyo funcionamiento se describe a continuación:

Ingreso y lectura de datos: El ingreso de datos se realiza en un archivo de hoja de cálculo mediante tres tablas: una tabla de coordenadas que contiene la numeración y posición de los nodos de la estructura; una tabla de conectividad la cual tiene la numeración de los elementos, los nodos a los que se conectan y el grupo de simetría al que pertenecen; una tabla con nodos libres que identifica los nodos que no están apoyados. Se programó una subrutina que presenta un gráfico tridimensional del ensamblaje para verificar que la información de la geometría y conectividad se ingresó correctamente.

Obtención del modo de pretensado: El algoritmo consta de una subrutina que ensambla la matriz de equilibrio con la información ingresada en el archivo de datos. En el cálculo de los modos de pretensado se hace uso del comando `svd()` del programa Matlab, el cual determina los vectores y valores singulares de la matriz de equilibrio. De estos vectores se eligen los correspondientes al espacio nulo de la matriz de equilibrio para obtener los modos de pretensado independiente. Luego se ensambla la matriz \bar{T} , descrita en el capítulo anterior, y se aplica nuevamente la SVD para encontrar los modos de pretensado integral.

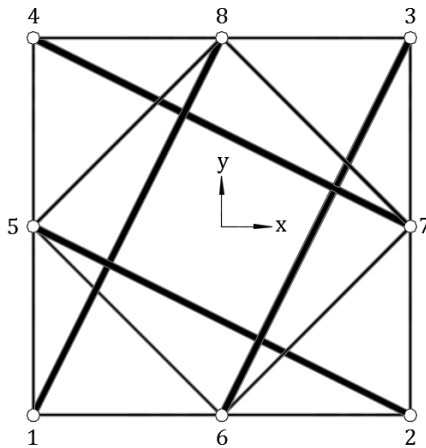
Presentación de resultados: Si el modo de pretensado integral obtenido es único y además es consistente con la rigidez unilateral de los elementos, entonces el resultado se presenta de forma numérica en un vector que contiene la distribución del pretensado para cada grupo de elementos. Debido a que esta distribución es relativa se puede normalizar con respecto al primer grupo de elementos dividiendo todas las componentes del vector para el valor de la primera componente del mismo. Adicionalmente, se presenta un gráfico tridimensional de la estructura mostrando los elementos comprimidos en rojo y los traccionados en azul, y el grosor de los elementos es proporcional a su coeficiente de distribución de pretensado.

Para validar los resultados que genera el algoritmo, este se aplicó en estructuras de las referencias (Yuan et al., 2007), (Z. Zhang et al., 2008) y (Schenk, Herder, & Guest, 2006) y se compararon las distribuciones de pretensado obtenidas por el algoritmo con las obtenidas en dichas referencias. A continuación se presenta una de estas comparaciones.

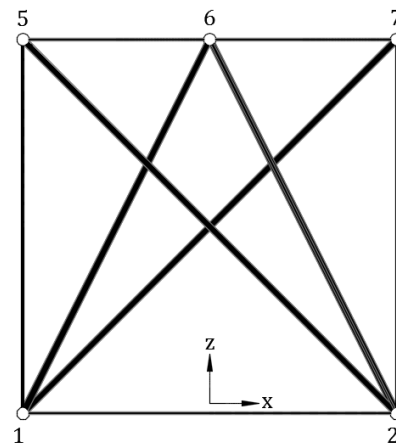
Considerando el módulo en tensegridad mostrado en la Figura 3.9 que consta de 12 elementos traccionados y 4 comprimidos. Los elementos se agrupan por su simetría en: cables horizontales inferiores, cables verticales, cables horizontales superiores y barras; con coeficientes de distribución de fuerzas internas t_o , t_v , t_h y t_b respectivamente, siendo estos coeficientes positivos para los elementos traccionados y negativos para los comprimidos.

Schenk plantea expresiones analíticas que permiten encontrar las fuerzas internas relativas de estructuras como la mostrada en la Figura 3.9. Estas fuerzas relativas o coeficientes de pretensado calculados con las expresiones analíticas para el ensamblaje son:

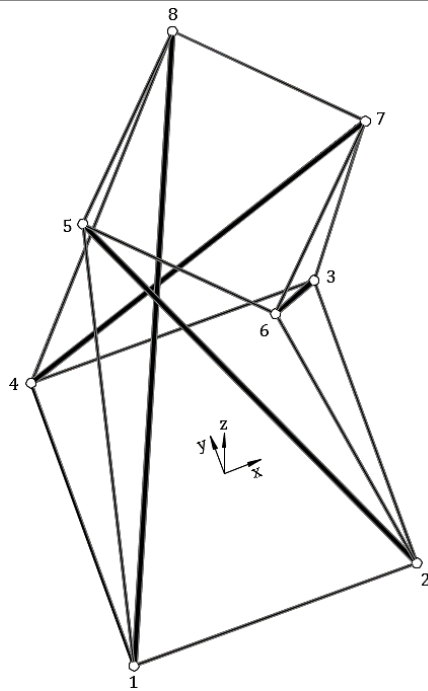
$$\begin{bmatrix} t_o \\ t_v \\ t_h \\ t_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2361 \\ 1.4142 \\ -3 \end{bmatrix}$$



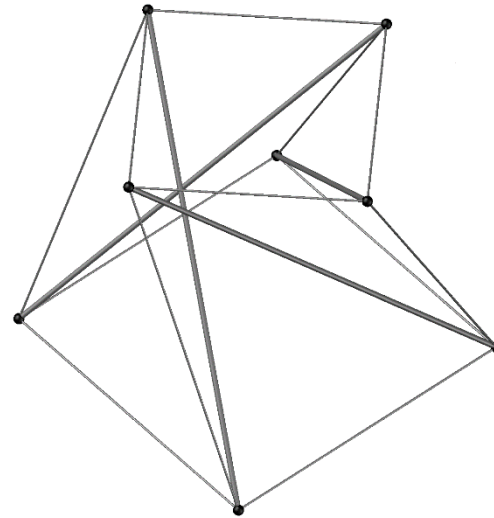
Planta



Elevación



Axonometría



Perspectiva tridimensional

Figura 3.9 Estructura en tensegridad para la validación del algoritmo. Las coordenadas de los nodos se muestran en la Tabla 3.2.

Luego el mismo ensamblaje fue introducido en el algoritmo expuesto anteriormente, la Tabla 3.2 y la Tabla 3.3 muestran el formato del ingreso de los datos de coordenadas y conectividad, respectivamente. Para este caso todos los nodos están libres en el espacio debido a que se trata de un módulo en tensegridad pura, por lo que puede autotensarse, entonces la tabla de nodos libres incluye toda la primera columna de la Tabla 3.2.

Tabla 3.2 Coordenadas de los nodos de la estructura mostrada en la Figura 3.9.

Nodo	x (m)	y (m)	z (m)
1	-3	-3	0
2	3	-3	0
3	3	3	0
4	-3	3	0
5	-3	0	6
6	0	-3	6
7	3	0	6
8	0	3	6

Tabla 3.3 Conectividad de los elementos de la estructura mostrada en la Figura 3.9.

Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Grupo de Simetría
1	1	2	1
2	2	3	1
3	3	4	1

4	4	1	1
5	2	6	2
6	3	7	2
7	4	8	2
8	1	5	2
9	6	7	3
10	7	8	3
11	8	5	3
12	5	6	3
13	2	5	4
14	3	6	4
15	4	7	4
16	1	8	4

Se verificó el ingreso de datos mediante el gráfico de la estructura en Matlab, Figura 3.10.

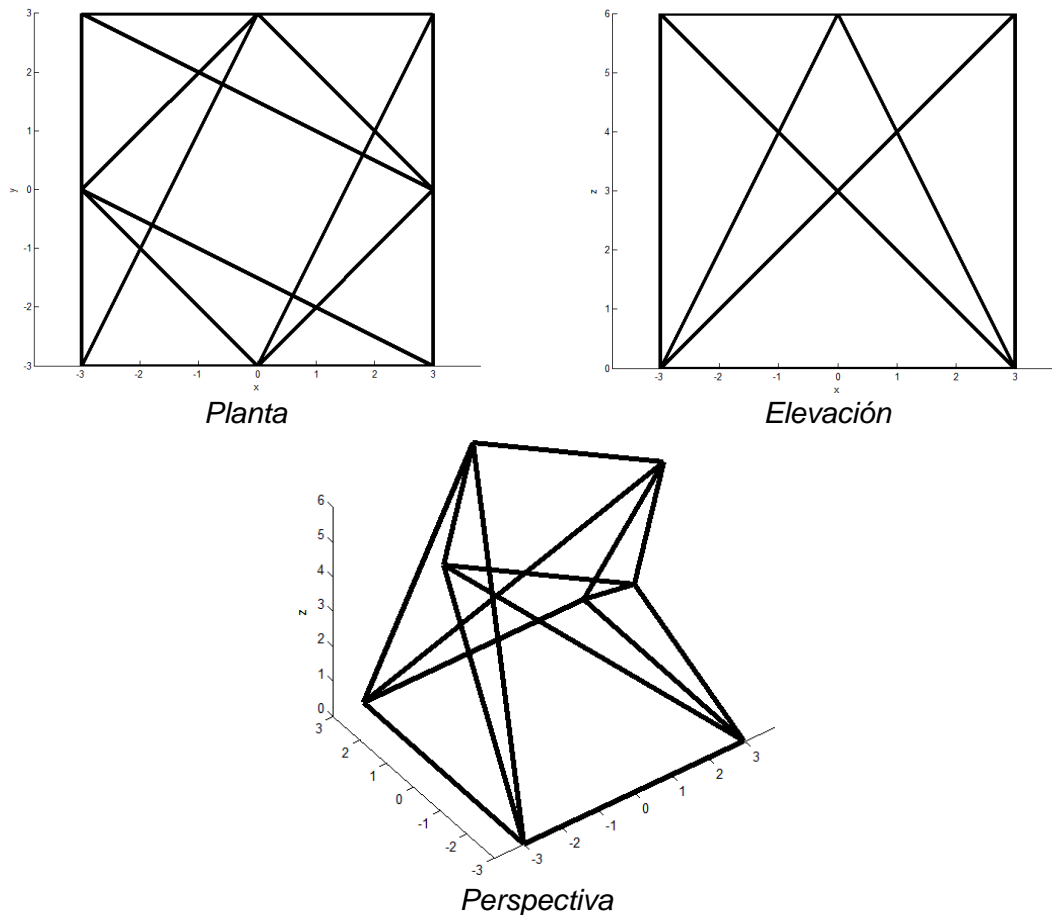


Figura 3.10 Ensamblaje en Matlab de la estructura de la Figura 3.9.

Después de verificar la geometría, se ejecuta el algoritmo generando los resultados mostrados en la Figura 3.11 y Figura 3.12, las que muestran la distribución numérica del pretensado para cada grupo de simetría y el gráfico de dicha distribución, respectivamente.


```
>> mautoesfuerzo

ans =

    1.0000
    2.2361
    1.4142
   -3.0000

>>
```

Figura 3.11 Modo factible de pretensado integral para la estructura de la Figura 3.9 obtenido con el algoritmo en Matlab.

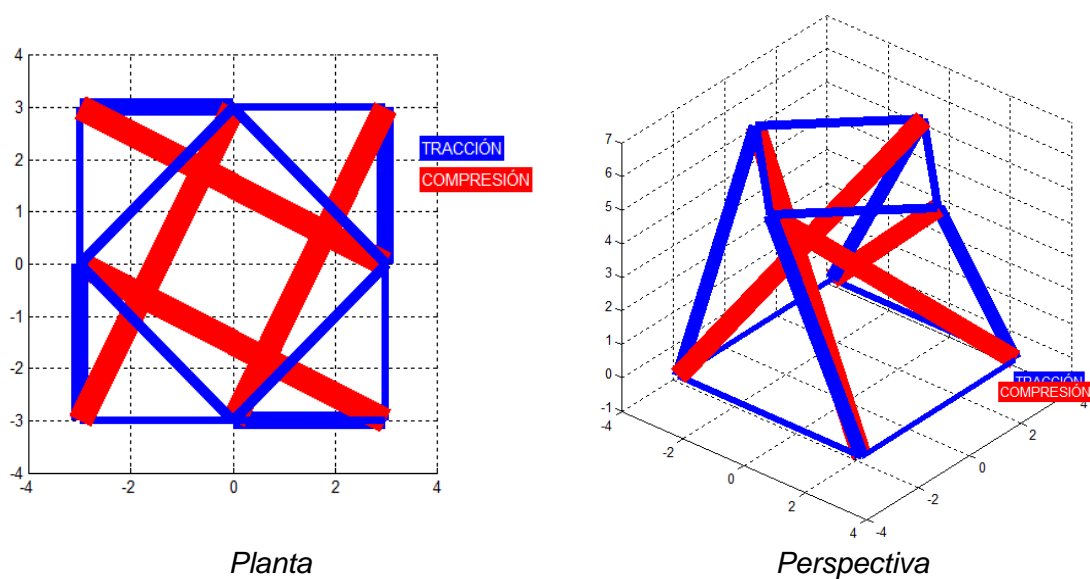
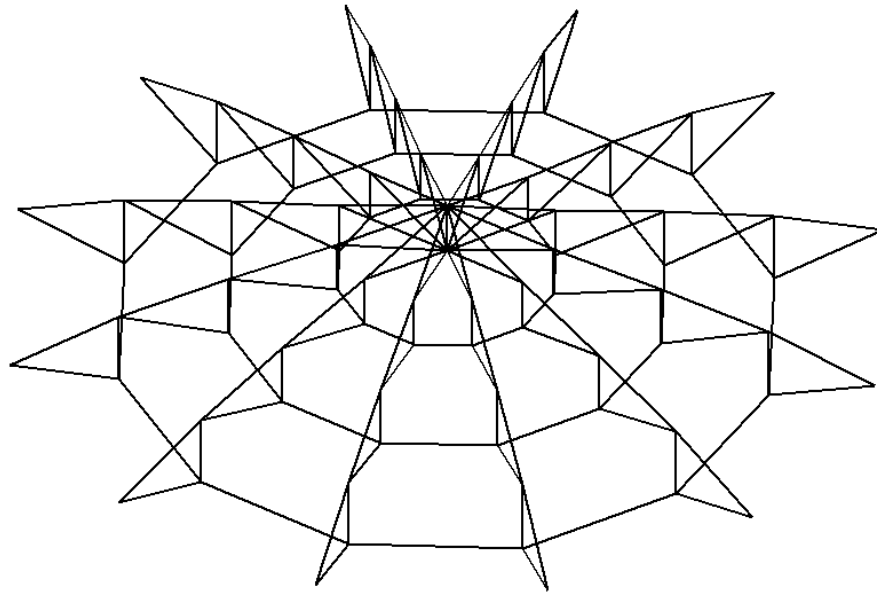


Figura 3.12 Respuesta gráfica del algoritmo en Matlab.

El proceso de validación demostró que las soluciones del algoritmo son correctas. Entonces se procedió a encontrar la distribución de fuerzas internas de la estructura de cubierta, propósito del presente trabajo, cuya geometría se mostró en la Figura 3.6.

Se consideran los grupos de simetría mostrados en la Figura 3.8. De manera análoga a la estructura simple de la validación, se ingresa la información en el algoritmo mediante tablas de coordenadas, conectividad y de nodos libres. En la Figura 3.13 se muestra la estructura graficada en Matlab.

Los resultados del algoritmo se muestran en la Tabla 3.4 y en la Figura 3.14.



Perspectiva

Figura 3.13 Ensamblaje en Matlab de la estructura de cubierta propuesta.

Tabla 3.4 Modo factible de pretensado integral para la estructura de cubierta.

Elemento	Distribución de Pretensado
A	1.0000
B	0.3883
C	0.2447
D	0.5525
E	0.3263
F	0.1942
G	0.0983
H	0.5525
I	0.2159
J	0.1330
K	0.0983
L	-0.1933
M	-0.0787
N	-0.0405
O	-0.3040

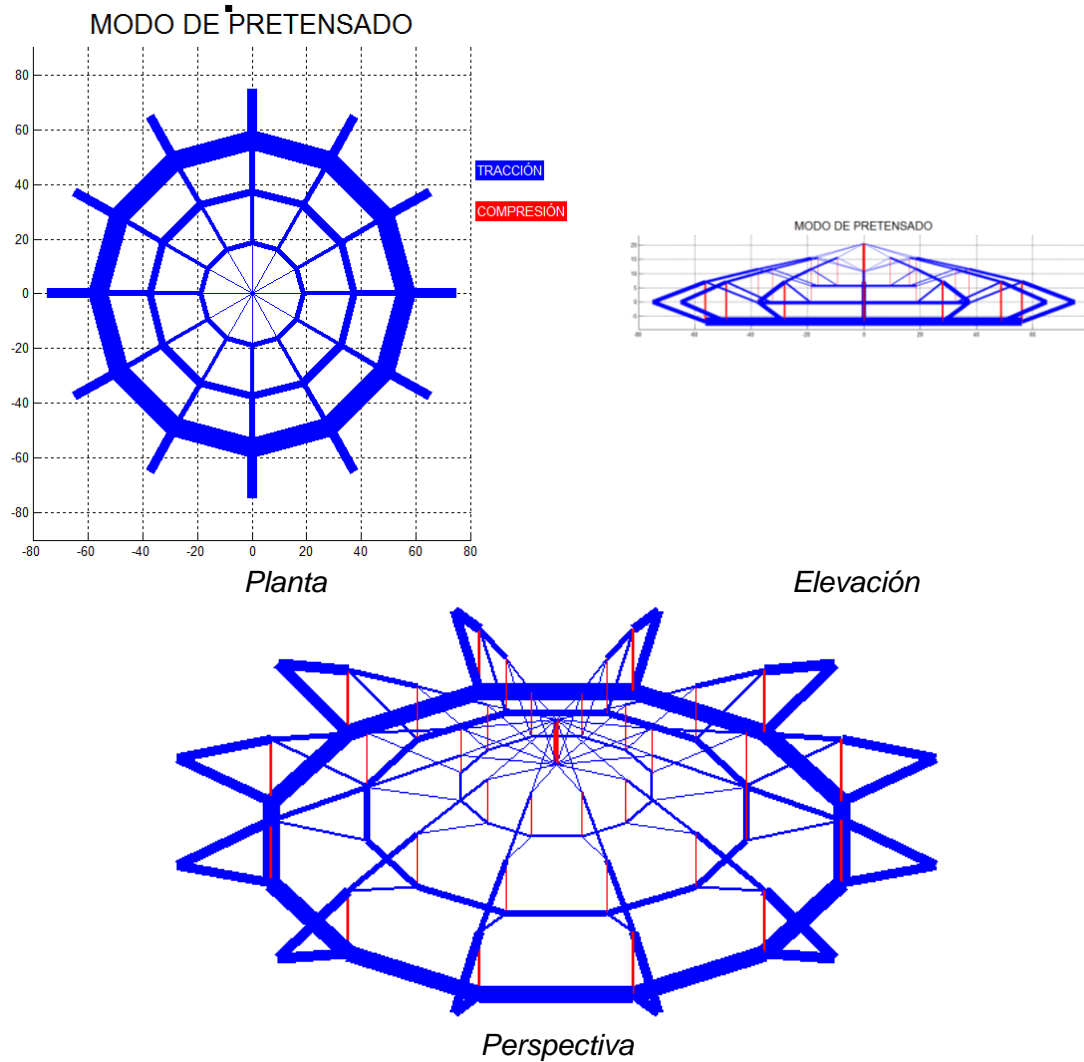


Figura 3.14 Distribución del pretensado en la estructura, respuesta gráfica del algoritmo en Matlab.

3.4 Modelos Físicos

En este apartado se expone el trabajo realizado con modelos físicos, iniciando con la construcción de modelos simples y luego la construcción del prototipo a escala de la cubierta, objetivo del presente trabajo.

3.4.1 Modelos Simples

Materiales:

- Hilo nylon
- Barras de madera de sección circular
- Terminales eléctricas de cobre



Figura 3.15 Materiales usados para la construcción de los modelos en tensegridad.

El primer módulo, Figura 3.16, consta de cuatro elementos a compresión unido por una red tensada, la misma que es de nylon, es decir se trata de una tensegridad cerrada de cuatro barras, posteriormente se unieron dos de estos módulos formando uno solo cuya conexión es barra-cable (barra-nylon).

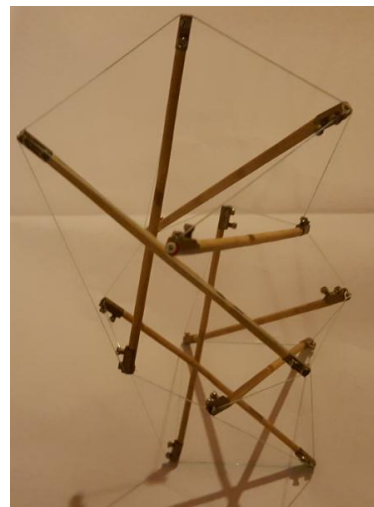


Figura 3.16 Modelos simples de estructuras en tensegridad.

La maqueta se basa en el módulo de 4 barras de base cuadrada, el procedimiento de elaboración se inició por conectar la red de elementos tensados con los terminales eléctricos, después colocar las barras dentro de la red, conforme se conectan más barras se complica el ensamblaje debido a que el sistema va adquiriendo una tensión cada vez mayor, con la aplicación de fuerza ingresan las barras y toman su posición que finalmente permite adquirir al modelo una configuración geométrica única y estable. En un modelo de escala más grande se complica debido a que se requiere de la aplicación de grandes fuerzas, como se explicara cuando se trate la construcción del prototipo a escala.

3.4.2 Modelo del Prototipo

Este apartado expone la construcción del prototipo del modelo final de la cubierta, la escala del modelo físico es 1:100 con lo que el diámetro externo del modelo es de 1.50 m.

Se pretende reproducir el proceso de construcción y los inconvenientes que involucra, en aspectos muy puntuales como conexiones y proceso de pretensado en los cables, siendo este último el más importante.

La

Tabla 3.5 muestra las dimensiones longitudinales de los elementos del prototipo a la escala indicada. La columna de elementos en la tabla hace referencia a los grupos de simetría de la Figura 3.8.

Para los elementos comprimidos se optó por utilizar tubos de aluminio de sección circular debido a la disponibilidad de diámetros pequeños.

Tabla 3.5 Longitud de los elementos del prototipo a escala de la estructura propuesta.

Elemento ^a	Longitud (cm)
A	29.1
B	19.4
C	9.7
D	20.0
E	19.3
F	19.1
G	19.4
H	20.0
I	20.1
J	19.7
K	19.4
L	14
M	12
N	10
O	10

a. La designación de los elementos es la correspondiente a los grupos de simetría de la Figura 3.8.

Materiales:

- Cable de acero de 2 mm de diámetro
- Tubo circular de aluminio de 8 mm de diámetro
- Terminales eléctricos de cobre
- Tornillos y tuercas
- Tensores pequeños
- Tubo circular de acero de 15 mm de diámetro (anillo de compresión)



Figura 3.17 Materiales usados en el prototipo a escala de la estructura.

El problema principal sobre el que se trabajó fue el de las conexiones, la conexión de los elementos debe ser lo suficientemente resistente para no fallar con la aplicación de las tensiones a las que va a estar sometida la estructura, pues esto generaría el colapso de toda la cubierta. Este es un aspecto sobre el cual se plantearon muchas ideas, finalmente se optó por sacar rosca en el interior de los tubos de aluminio y roscar tornillos del mismo diámetro con tuercas soldadas en sus cabezas. Al final resultó una conexión de gran resistencia que soporta de forma segura las tensiones aplicadas.

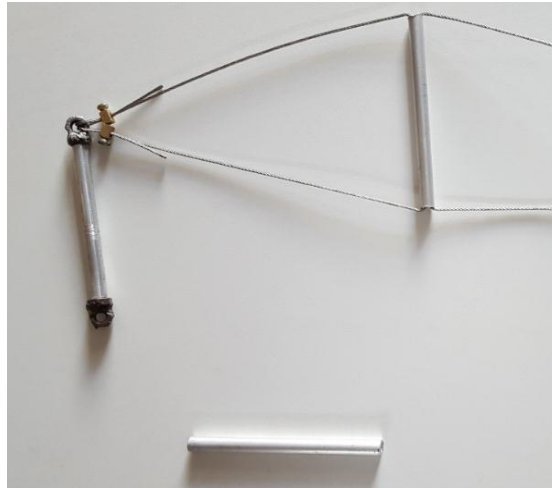


Figura 3.19 Conexión barra-cable.



Figura 3.18 Configuración de la conexión en los extremos de las barras.

Para el anillo de compresión se usó un tubo circular de acero formando un dodecaedro, sobre sus vértices se soldaron tuercas en las cuales se conectarían los cables radiales que unen el primer anillo de cable y los elementos a compresión.

Antes de construir el modelo a escala se construyó su homólogo en corte (2D), Figura 3.20, con el fin de afinar detalles sobre conexiones, la manera en que se aplicara la tensión en los cables y a qué elemento(s), comprobaciones sobre medidas y deformaciones de la misma que dieron un enfoque claro sobre qué soluciones dar a algunas complicaciones encontradas en el proceso.

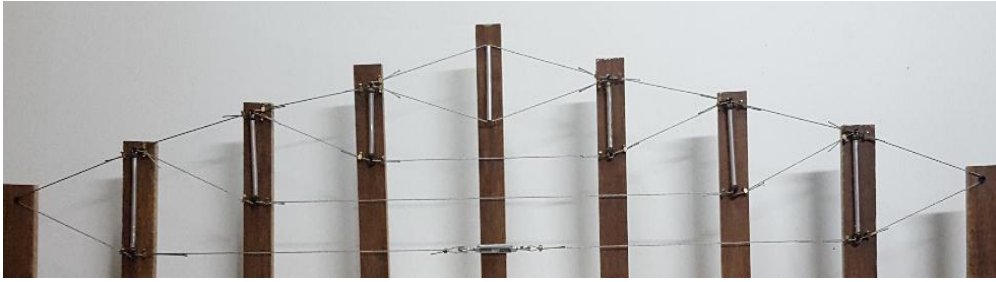


Figura 3.20 Modelo en corte 2D del prototipo, los cables horizontales cumplen la misma función que los anillos de cables, los elementos verticales de madera mantienen a los puntales en el mismo plano.

Con la experiencia obtenida del modelo en 2D, se inició la construcción del prototipo a escala, se generó una red de cables conectada con las barras que formarían parte de los doce conjuntos radiales del domo, Figura 3.21, el elemento central es el último en conectarse con el resto del conjunto.

Los cables externos radiales se conectaron al anillo de compresión obteniendo una red de cables y barras conectados de extremo a extremo formando un conjunto suspendido, Figura 3.22.

En este punto se conectan los anillos de cables lo que provocó que el domo se fuera elevando, así hasta llegar al anillo externo de cable el cual en un inicio se conectó a dos tensores, Figura 3.25.

El giro en los tensores generó poco a poco que el domo se fuera elevando hasta que los tensores no permitieron ajustar la longitud.

En este punto se reemplazaron los dos tensores por uno solo con cables unidos de extremo a extremo volviendo al punto de dar giro al único tensor hasta que la longitud del elemento sea la correcta.

A continuación se presenta una secuencia fotográfica que ayudara a entender de mejor manera el proceso constructivo del prototipo:



Figura 3.21 Cables y barras conectados formando los conjuntos radiales. Los elementos comprimidos L, M y N se muestran de izquierda a derecha.



Figura 3.22 Conexión de los conjuntos radiales con el anillo de compresión y la barra central.



Figura 3.23 Conexión del anillo tensado central. Se observa como la parte central del domo se eleva debido a la tensión que genera el cable en la parte inferior.



Figura 3.24 Conexión del segundo anillo tensado. La zona central del domo se eleva y las tensiones en todo el sistema crecen, lo que complica la conexión del anillo.

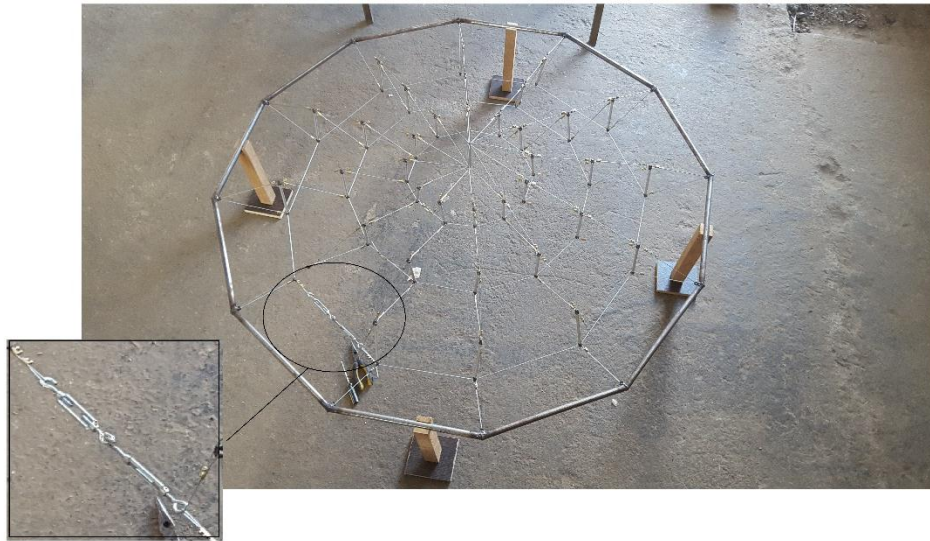


Figura 3.25 El último anillo de cable con una tensión inicial. Se observan los dos tensores que se usaron para reducir la longitud del elemento. Posteriormente se reemplazaron con un solo tensor para ajustar la longitud hasta llegar a la dimensión requerida.

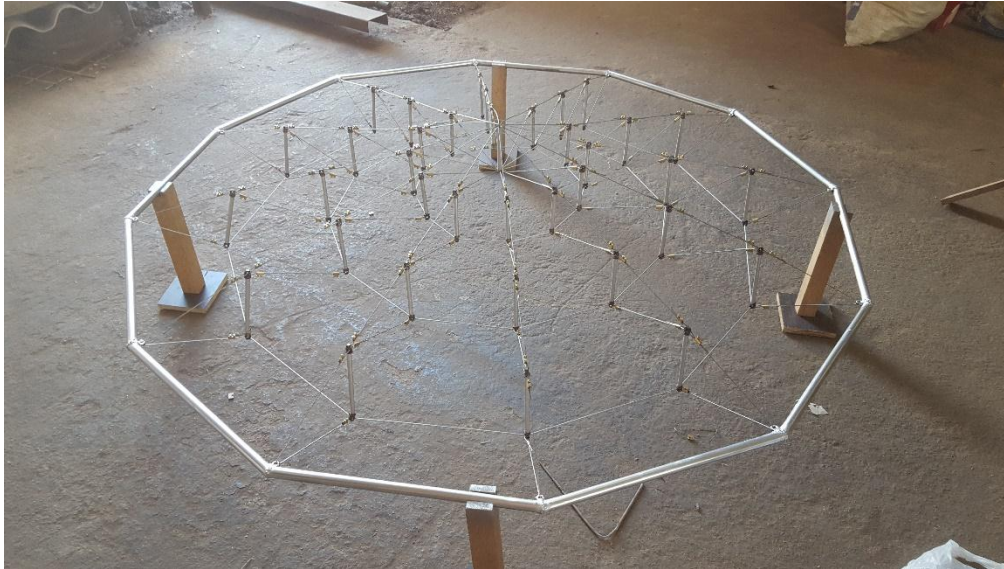


Figura 3.26 Prototipo a escala terminado.

La aplicación de tensión en el cable del anillo de cable externo por medio del tensor requirió de grandes fuerzas, lo que nos da una idea de la magnitud de esfuerzos que se aplicaría en el modelo a escala real.

La geometría final del domo fue la deseada inicialmente, si se hace una comparación de la magnitud de la estructura y su peso, 3.5 kg o 2.1 Kg/m², es fácil tener una idea de la ligereza de este tipo de estructuras.



Figura 3.27 Prototipo a escala de la cubierta, perspectiva inferior.



Evidentemente, como se indica en los gráficos, la estabilización de la estructura depende en gran medida del anillo de compresión lo que coloca al domo en el grupo de las tensegridades abiertas, el anillo de compresión absorbe los esfuerzos generados por toda la estructura.

Para lograr una estructura estable se ajustaron las longitudes correspondientes a las calculadas para cada elemento, de acuerdo a la escala del modelo, generando las fuerzas de pretensado de forma experimental.

4 Diseño

4.1 Proceso de Diseño

Luego de que el estado inicial de la estructura se determinó, es decir, su geometría y la distribución de pretensado, se procede a dimensionar los elementos que la componen. Para los elementos a compresión se utilizó el método de Diseño en Base a Factores de Carga y Resistencia (LRFD) según las disposiciones de la especificación AISC 360-10 (AISC, 2010). Para los elementos a tracción se recurrió a la normativa ASCE 19-96 (ASCE, 1996). El primer paso del proceso de diseño es el de la determinación de las acciones externas que se aplican sobre el ensamblaje, es decir, las cargas que debe soportar. Estas cargas se determinaron en base al Estándar ASCE/SEI 7-10 (ASCE, 2010).

El diseño se basa en la determinación de las fuerzas que se generan en los elementos mediante una simulación numérica del comportamiento de la estructura, dicha simulación se realizó en los programas de análisis por elementos finitos descritos en el capítulo anterior. En una primera etapa del análisis la estructura se modeló en el software de cálculo con elementos de tipo “truss” (barra biarticulada) y de tipo cable, lo que implica que no se toman en cuenta efectos de flexión ni pandeo durante el análisis, en esta etapa también se definió el nivel de pretensado del ensamblaje. En la etapa final, con los elementos dimensionados en base al modelo de la primera etapa, se reemplazaron los componentes comprimidos con elementos de tipo “beam” (viga) para ejecutar un análisis no lineal del pandeo, de este modo se valida la estabilidad global de la estructura ante los casos de carga considerados.

El diseño en la primera etapa se resume en los siguientes pasos:

Paso 1: Estableciendo un nivel de pretensado, se calculan las fuerzas iniciales de los elementos con el modo factible de pretensado integral determinado en el capítulo anterior. Con estas fuerzas se pre-dimensionan los elementos de la estructura. El nivel de pretensado se establece fijando la fuerza interna en el grupo de simetría de referencia, por ejemplo en el A, y luego calculando las fuerzas internas de los demás grupos de simetría relativos al de referencia.

Paso 2: Se analiza la estructura con los casos de carga considerados teniendo en cuenta la no linealidad geométrica y los efectos del pretensado, de este análisis se extrae información acerca de la rigidez de la estructura y de las máximas fuerzas internas en cada grupo de simetría para los casos de carga considerados.

Paso 3: Analizando la estructura deformada se decide si el pretensado debe aumentarse para evitar cables con catenaria excesiva debido a que estos no aportan a la rigidez de la estructura. En caso de que sea necesario aumentar el nivel de pretensado se retorna al *Paso 1*. Si el nivel de pretensado es adecuado, se usan las fuerzas internas máximas de cada grupo de simetría y los factores correspondientes a cada método, tanto para elementos a compresión y elementos a tracción, para redimensionar los elementos. Se repite el *Paso 2* para verificar que los componentes redimensionados cumplen con la resistencia requerida definida por cada método. De no cumplir con dicha resistencia se redimensionan nuevamente y se ejecuta el *Paso 2*.

4.2 Cargas

En el presente trabajo no se consideraron los efectos de cargas sísmicas en el diseño de los elementos de la cubierta.

Elementos a compresión:

Las combinaciones de carga, para los elementos comprimidos, son las correspondientes al método LRFD en los documentos de referencia ASCE 7-10 y AISC 360-10. Las combinaciones consideradas para estos elementos son las siguientes:

$1.4D$	C.1
$1.2D + 0.5(Lr \text{ o } S \text{ o } R)$	C.2
$1.2D + 1.6(Lr \text{ o } S \text{ o } R) + 0.5W$	C.3
$1.2D + 1.0W + 0.5(Lr \text{ o } S \text{ o } R)$	C.4
$0.9D + 1.0W$	C.5
$1.2D + 0.5Lr$ con Lr en la mitad de la luz	C.6
$1.2D + 1.6Lr + 0.5W$ con Lr en la mitad de la luz	C.7
$1.2D + 1.0W + 0.5Lr$ con Lr en la mitad de la luz	C.8

Elementos a tracción:

Las combinaciones de carga consideradas para el diseño de los cables son las correspondientes al método presente en la normativa ASCE 19-96. Se usaron las siguientes combinaciones:

$2.2(D + P)$	T.1
$2.2(D + P + (Lr \text{ o } S \text{ o } R))$	T.2
$2.0(D + P + W)$	T.3
$2.0(D + P + (Lr \text{ o } S \text{ o } R) + W)$	T.4
$2.2(D + P + Lr)$ con Lr en la mitad de la luz	T.5
$2.0(D + P + Lr + W)$ con Lr en la mitad de la luz	T.6

En donde:

D es la carga muerta o permanente que involucra el peso propio de la estructura

L_r es la carga viva de cubierta, especificada para operaciones de mantenimiento

S es la carga por granizo

R es la carga por lluvia

W es la carga de viento

P es la carga de pretensado

Las combinaciones C.6, C.7, C.8, T.5 y T.6 se consideraron en el presente trabajo, adicionalmente a las de los documentos de referencia, con la finalidad de investigar los efectos de cargas asimétricas en la estructura de cubierta. Éstas combinaciones adicionales corresponden a las combinaciones C.2, C.3, C.4, T.2 y T.4, respectivamente, en los documentos de referencia, con la carga viva de cubierta, L_r , actuando en la mitad de la superficie de la estructura.

Carga Muerta:

Dentro de la carga muerta se considera el peso propio de los componentes estructurales. Como valores para el diseño se tomaron los siguientes:

Elementos Comprimidos: Se usaron perfiles tubulares de acero estructural, y se asumió el valor estándar de densidad para este material que es de 7850 Kg/m^3 .

Elementos Traccionados: Se usaron cables estructurales de gran resistencia. Para cada elemento se utilizó su masa por unidad de longitud especificada en el catálogo para cada diámetro utilizado. En los primeros predimensionamientos se utilizó un valor promedio de 8212 Kg/m^3 y en las verificaciones finales se usó el valor del catálogo para cada diámetro.

Membrana Tensada: Como cobertura superficial en las estructuras de domo de cables generalmente se usan membranas tensadas sujetadas en los cables radiales superiores de la estructura principal y a cables secundarios entre estos para formar una disposición de crestas y valles. La densidad de esta membrana estructural se tomó igual a 2 Kg/m^2 . Esta carga, al igual que las demás cargas distribuidas por unidad de superficie en la membrana, se modeló como carga distribuida por unidad de longitud sobre los elementos tensados superiores en los que se fija la membrana, estos valores de carga distribuida se calcularon multiplicando la carga superficial por un ancho tributario para cada

elemento radial superior de la estructura. La Tabla 4.1 muestra estos valores de carga por peso de la membrana para los elementos que la soportan.

Tabla 4.1 Carga permanente producida por el peso de la membrana.

Elemento	Carga (Kgf/m)
D	68
E	48
F	29
G	9

En el presente trabajo no se consideraron cargas muertas adicionales, como posibles cargas por equipamiento para luminarias y pasos de mantenimiento, entre otras.

Carga Viva de Cubierta:

La carga viva de la cubierta se tomó igual a $100 \text{ Kg}/\text{m}^2$ de acuerdo al capítulo 4 del Estándar ASCE/SEI 7-10 que trata sobre las cargas vivas para el diseño.

En las combinaciones C.2, C.3, C.4, T.2 y T.4 el valor de (*Lr o S o R*) es el mayor de entre los tres agrupados en el paréntesis, al tomar un $Lr = 100 \text{ Kg}/\text{m}^2$ es poco probable que cargas de granizo o de lluvia lo superen, por lo tanto en dichas combinaciones se tomara *Lr* como el valor a considerar.

Los casos de carga C.6, C.7, C.8, T.5 y T.6 son asimétricos aplicando la carga viva de cubierta en la mitad de la superficie de la estructura.

Al igual que el peso de la membrana, la carga viva se modeló como distribuida por unidad de longitud aplicada sobre los cables radiales superiores que sostienen la membrana, los valores aplicados de esta carga se muestran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Carga viva de cubierta aplicada sobre los cables radiales superiores.

Elemento	Carga (Kgf/m)
D	3380
E	2400
F	1440
G	474

Carga de Viento:

En estructuras ligeras de cubierta, en especial de grandes superficies, la carga de viento es un factor determinante en el diseño. Se tomara como carga de referencia la obtenida por el Procedimiento Direccional expuesto en el capítulo 27 del Estándar ASCE 7-10 aplicable para domos esféricos. Este valor de referencia debería ser ajustado en base a pruebas de túnel de viento o modelos numéricos para la cubierta propuesta debido a su geometría particular que producirá una distribución irregular de presiones sobre la superficie.

En el Procedimiento Direccional se consideraron condiciones topográficas desfavorables y se determinó que en la superficie de la cubierta predominan las cargas de succión por viento. En el Anexo B, se recopilan los pasos del proceso y los parámetros asumidos para la determinación de la carga para el presente diseño. El valor de la succión de mayor intensidad obtenido fue de -61 Kg/m^2 que para el presente trabajo se considerará uniformemente distribuido en toda la superficie de la cubierta. El signo negativo denota la succión para diferenciarla de las cargas en dirección gravitacional.

La Tabla 4.3 muestra los valores de la carga de viento llevados a cargas distribuidas por unidad de longitud sobre los cables radiales superiores en los que se fija la membrana.

Tabla 4.3 Carga de viento aplicada sobre los cables radiales superiores. El signo negativo denota succión.

Elemento	Carga (Kg/m)
D	-2061
E	-1464
F	-878
G	-289

Combinaciones:

Elementos a compresión:

La Tabla 4.4 muestra las combinaciones de carga del método LRFD aplicadas sobre los cables radiales superiores que sostienen la membrana para el diseño de los elementos comprimidos. Adicionalmente a estas cargas aplicadas se asigna el factor correspondiente a la carga muerta para el peso de los elementos de la estructura en cada caso de carga.

Tabla 4.4 Cargas de las combinaciones aplicadas sobre los cables radiales superiores para el diseño de los elementos a compresión.

Elemento	Combinaciones				
	C.1 (Kg/m)	C.2 (Kg/m)	C.3 (Kg/m)	C.4 (Kg/m)	C.5 (Kg/m)
D	95	1771	4458	-291	-2001
E	67	1258	3166	-206	-1421

F	40	755	1900	-124	-853
G	13	248	625	-41	-281

Tabla 4.4 Continuación: Cargas de las combinadas aplicadas sobre los cables radiales superiores para el diseño de los elementos a compresión, casos asimétricos.

Elemento	Combinaciones					
	C.6 (Kgf/m)		C.7 (Kgf/m)		C.8 (Kgf/m)	
	IZQ	DER	IZQ	DER	IZQ	DER
D	1771	81	4458	-950	-291	-1981
E	1258	58	3166	-674	-206	-1406
F	755	35	1900	-405	-124	-844
G	248	11	625	-133	-41	-278

Elementos a tracción:

La Tabla 4.5 muestra las combinaciones de carga para el diseño de los elementos traccionados aplicadas sobre los cables radiales superiores que sostienen la membrana. Adicionalmente a estas cargas aplicadas, actúa el peso de los elementos de la estructura en cada caso de carga.

Tabla 4.5 Cargas de las combinaciones aplicadas sobre los cables radiales superiores para el diseño de los elementos a tracción.

Elemento	Combinaciones			
	T.1 (kgf/m)	T.2 (kgf/m)	T.3 (kgf/m)	T.4 (kgf/m)
D	149.6	7585.6	-3988	2772
E	105.6	5385.6	-2832	1968
F	63.8	3231.8	-1700	1182
G	19.8	1064.8	-560	388

Tabla 4.5 Continuación: Cargas de las combinaciones aplicadas sobre los cables radiales superiores para el diseño de los elementos a tracción, casos asimétricos.

Elemento	Combinaciones			
	T.5 (kgf/m)		T.6 (kgf/m)	
	IZQ	DER	IZQ	DER
D	7585.6	149.6	2772	-3988
E	5385.6	105.6	1968	-2832
F	3231.8	63.8	1182	-1700
G	1064.8	19.8	388	-560

4.3 Propiedades de los Materiales

En esta sección se tratarán las propiedades de los materiales utilizados en el diseño, características físicas de los elementos estructurales, normativas que rigen la elaboración de los materiales, además de parámetros que se verificaron para la elección de los mismos.

Tubo Estructural:

Se trata de un perfil hueco de sección circular, los tubos estructurales por lo general soportan grandes compresiones y también tracciones.

Características de resistencia de los tubos estructurales:

- Los puntales de sección tubular son igualmente rígidos en todas las direcciones a menos que los momentos sean de gran magnitud.
- La sección circular de un perfil HSS al tener un radio de giro constante en todas las direcciones con respecto al centroide lo hace más eficiente para trabajar a compresión.
- Alta resistencia a la torsión.
- Debido a que los tubos circulares tienen una sección aerodinámica la resistencia al viento es aproximadamente de solo 2/3 de la que tienen superficies planas del mismo ancho.

Para el diseño, se recurrió al catálogo de un fabricante de tubería estructural (CONDESA, 2006), este distribuidor cuenta con una gama amplia de tubos estructurales destinados específicamente para proyectos estructurales de gran escala, disponen de tubería de diámetros grandes, amplios espesores de pared y grandes longitudes lo que evita uniones.

En cuanto al proceso de fabricación disponen de perfiles tubulares:

- Conformados en frío y sin tratamiento térmico posterior.
- Conformados en frío y acabados en caliente
- Conformados en caliente.

Propiedades Mecánicas de la Tubería Estructural:

Según catálogo: las propiedades tanto químicas como mecánicas se basan en las normativas EN 10210 (European Committee for Standardisation, 1997) y

EN 10219 (European Committee for Standardisation, 2006), normas Europeas para aceros estructurales – grados y cualidades.

Según las normativas mencionadas, inmersas en el catálogo utilizado para la elección de la tubería estructural, se tiene las siguientes propiedades, Tabla 4.6:

Tabla 4.6 Propiedades mecánicas del acero.

Designación del Acero	Esfuerzo de Fluencia min N/mm^2	Resistencia a la tracción N/mm^2			Alargamiento mínimo %	
	Espesor nominal $T \leq 16 \text{ mm}$	espesor nominal			espesor nominal $T \leq 40 \text{ mm}$	
		$T < 3 \text{ mm}$	frio $3\text{mm} \leq T \leq 40\text{mm}$	caliente $3\text{mm} \leq T \leq 40\text{mm}$	frio	caliente
S 275 J0H	275	430/580	410/560		20	23
S 355 J2H	355	510/680	470/630		20	22

Dónde: S 275 J0H y S 355 J2H son los tipos y calidades de acero, para el diseño se eligió el acero S 355 J2H el cual posee las siguientes propiedades:

Módulo de elasticidad: $E = 210 \text{ kN/mm}^2$

Esfuerzo de fluencia: $F_y = 355 \text{ N/mm}^2$

Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$ (en rango elástico)

En cuanto a las tolerancia dimensional del tubo estructural de sección circular; el diámetro con $\pm 0.5 \text{ mm}$ como mínimo y de $\pm 10 \text{ mm}$ como máximo, el espesor aproximadamente de -10% y su masa una tolerancia de $\pm 6 \%$ en largos individuales.

En el catálogo las longitudes habituales en las que suministran tubería van de 6 m a 12 m, pero, bajo pedido se puede proveer de longitudes de 4 m y 16 m.

Cable Estructural:

Los cables estructurales están destinados para diferentes usos; puentes, torres eléctricas y telecomunicación, estructuras y estructuras de cubiertas.

Los cables de acero están conformados por alambres del mismo material, estos generalmente se están trenzados en hélice formando unidades más grandes llamados torones o cordones los mismos que después son trenzados alrededor de un núcleo, llamado alma, que puede ser de acero o de fibra.

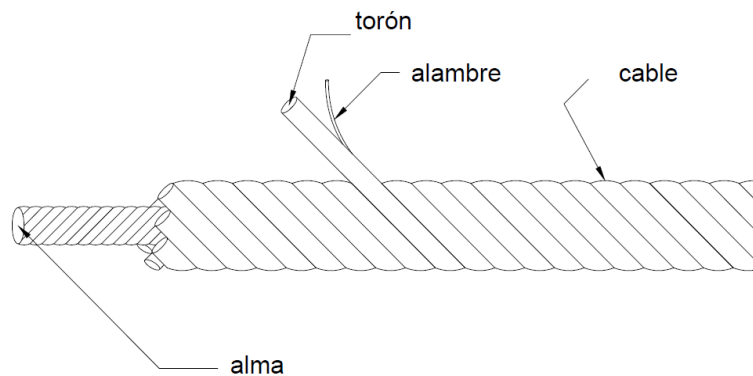


Figura 4.1 Estructura interna de un cable.

La diferencia de usar un cable con alma de acero de uno con alma de fibra radica en los factores ambientales, ya que estos afectan la resistencia de un cable de alma de fibra con altos porcentajes de humedad y elevadas temperaturas provocando hasta su ruptura, para ello se usan almas de acero en las que dichos factores tienen menor efecto en su resistencia.

Los alambres son obtenidos por estiramiento que va reduciendo el diámetro del alambrón, para ello se lo hace pasar por dados o matrices mediante la aplicación de fuerza axial.

El número de torones, número de alambres y tipo de alma definen el tipo de cable:

- Single: es de construcción común de siete alambres, tiene un alambre de núcleo y seis alambres del mismo diámetro que los rodean.
- Seale: es una construcción de cable que en la última capa tiene los alambres de mayor diámetro que los internos, lo que le da mayor resistencia a la abrasión.
- Filler: tiene dos capas de alambres, los hilos más delgados rellenan espacio dejados entre los otros alambres, este tipo se usa cuando es necesario cables de mayor sección metálica y buena resistencia al aplastamiento.
- Warrington: tiene una capa exterior formada por alambres de dos diámetros distintos, su posición se alterna dentro de la sección del cable.

- Warrington Seale: es una combinación de los antes mencionados, es perfecto para aportar flexibilidad así como también aporta gran resistencia a la abrasión.

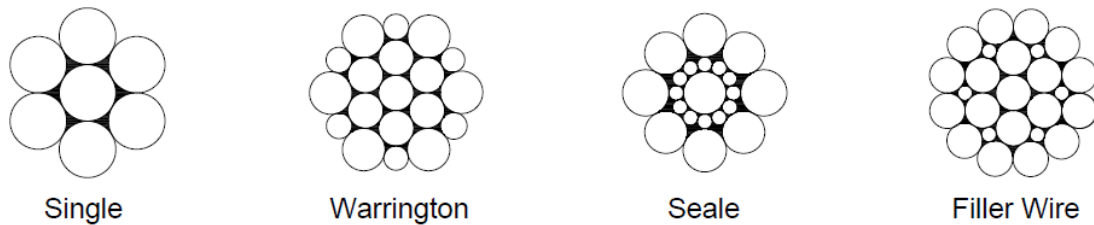


Figura 4.2 Construcciones de la sección transversal de un cable.

Para la elección de los cables se recurrió al catálogo de fabricante (Bethlehem, 2013), especializados en cables de gran resistencia para estructuras.

Propiedades Mecánicas:

Módulo de elasticidad: $E = 159 \text{ kN/mm}^2$

Peso promedio por unidad de volumen: $\gamma = 8212 \text{ Kg/m}^3$

Esfuerzo promedio de rotura: $F_u = 1507 \text{ N/mm}^2$

Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$ (en rango elástico)

Para el diseño se requiere de cable estructural que sea adecuado para soportar grandes esfuerzos de tensión, este requerimiento se cumple en la sección de cables de Bethlehem; “structural strand” o cordones estructurales, donde una gran flexibilidad y flexión no es un requerimiento.

Los cables están regidos bajo la normativa del ASTM especificación A586.

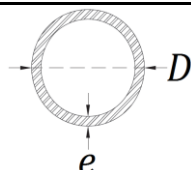
4.4 Estados Límite Considerados

4.4.1 Elementos a Compresión

Para el diseño de los elementos barra se usó el método LRFD según la normativa AISC 360-10. Para elementos de sección tubular, trabajando en compresión axial, la norma de referencia considera el pandeo global o flexión lateral y el pandeo local como estados límite. Que el elemento falle por pandeo implica que falle por acción de una fuerza mucho menor a la necesaria para que falle por aplastamiento. La resistencia requerida no debe exceder la resistencia de diseño del elemento en ningún caso de combinaciones de carga.

Para compresión, las secciones se clasifican como no esbeltas o esbeltas. Esta clasificación depende de la relación entre el ancho y el espesor de los elementos que componen la sección. La relación ancho espesor de la sección no debe superar una relación límite para que se considere como no esbelta. Para el caso de perfiles huecos de sección circular se toma el diámetro externo como ancho para determinar la mencionada relación. La relación límite se muestra en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7 Relación límite para la clasificación de las secciones circulares huecas.
(Tabla B4.1a del AISC 360-10)

Descripción de la Sección	Relación ancho/espesor	Relación Límite	Dimensiones
Tubos Circulares	$\frac{D}{e}$	$0.11 \frac{E}{F_y}$	

E = módulo elástico del acero

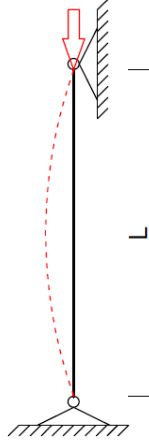
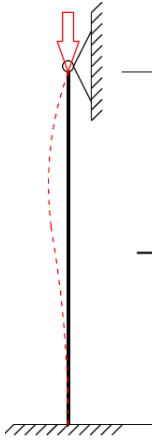
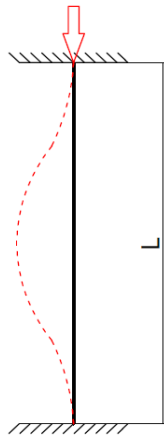
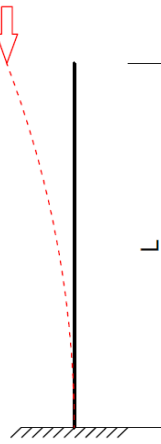
F_y = esfuerzo de fluencia del acero

Para secciones no esbeltas el pandeo local no es un estado límite. Debido a que las secciones usadas en el presente trabajo se clasifican como no esbeltas, en las siguientes páginas se hace referencia al estado límite de pandeo global según la sección E.3 del documento de referencia, aplicable a secciones no esbeltas.

Para el cálculo del pandeo es necesaria la razón de esbeltez del elemento que para miembros diseñados solo a compresión se recomienda no mayor a 200 como primera regla. Para obtener la razón de esbeltez se requiere del factor de longitud efectiva k .

La determinación de k depende las condiciones de apoyo del elemento cómo se indica en la Tabla 4.8:

Tabla 4.8 Factores de longitud efectiva para distintas condiciones de apoyo.

Condición	doble articulación	empotramiento-articulación	doble empotramiento	empotramiento libre
La línea punteada es indicativo de la forma que tomaría el elemento pandeado.				
Valor K teórico	1.00	0.70	0.50	2.00
Valor recomendado en condiciones aproximadas	1.00	0.80	0.65	2.10
Longitud efectiva	L	0.7 L	0.5 L	2 L

Debido a que los cables no pueden transmitir flexiones y a que las conexiones barra-cable suelen ser de tipo articulado, las condiciones de apoyo de las barras se asumieron como doblemente articuladas, por lo tanto para el diseño de los elementos a compresión el valor del factor de longitud efectiva es $k = 1$.

La esbeltez además del factor k, depende del radio de giro, r , y de la longitud, L :

$$esbeltez = \frac{k * L}{r}$$

Dependiendo de la esbeltez del elemento a compresión, se tienen las siguientes fórmulas para el diseño:

Pandeo inelástico:

$$\text{Cuando: } \frac{kL}{r} \leq 4.71 * \sqrt{\frac{E}{F_y}}$$

$$F_{cr} = \left[0.658^{\frac{F_y}{F_e}} \right] * F_y$$

Pandeo elástico:

$$\text{Cuando: } \frac{kL}{r} > 4.71 * \sqrt{\frac{E}{F_y}}$$

$$F_{cr} = 0.877 * F_e$$

Donde, F_{cr} es el esfuerzo crítico de pandeo y F_e el esfuerzo de pandeo de Euler determinado por:

$$F_e = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{kL}{r}\right)^2}$$

Para la determinación de la resistencia de compresión nominal, P_n :

$$P_n = F_{cr} * A_g$$

en donde A_g es el área de la sección transversal del elemento.

La carga última, P_u , a la que se somete el elemento debe cumplir la siguiente condición:

$$P_u \leq \phi * P_n$$

Para la resistencia a compresión axial, en el límite del agotamiento resistente por pandeo, el factor de resistencia es $\phi = 0.90$

4.4.2 Elementos a Tensión

El diseño de los cables se realizó según el estándar ASCE 19-96 aplicable al diseño de estructuras de cables. Esta normativa considera combinaciones de cargas para los elementos a tracción y utiliza coeficientes de mayoración sobre las tensiones generadas en los cables por las combinaciones de carga, estos coeficientes se encuentran en la sección 3.2 de la normativa.

Considerando las combinaciones de carga:

2.2(D + P)	T.1
2.2(D + P + (Lr o S o R))	T.2
2.0(D + P + W)	T.3
2.0(D + P + (Lr o S o R) + W)	T.4
2.2(D + P + Lr) con Lr en la mitad de la luz	T.5
2.0(D + P + Lr + W) con Lr en la mitad de la luz	T.6

Las combinaciones, T.5 y T.6, corresponden a las combinaciones T.2 y T.4 del estándar con la carga viva de cubierta, L_r , actuando en la mitad de la superficie de la estructura.

La resistencia de diseño del cable, S_d , debe ser igual o mayor a la carga mayorada calculada.

La resistencia de diseño, S_d , del cable es igual a la carga nominal de rotura, S_n especificada en el catálogo del fabricante, multiplicada por un factor de reducción, ϕ_f , que depende del tipo de conexión y tiene en cuenta la eficiencia en la transferencia de tensión entre el cable y el elemento de conexión.

La tabla 3.2.1 de la normativa indica el valor del factor de reducción, ϕ_f , dependiendo del tipo de conexión, pero solo es aplicable para cables de

diámetro menor a 2 pulgadas por lo que queda al margen debido a que en el presente trabajo los diámetros de los elementos a tracción todos son mayores a 2 pulgadas. En este caso en la misma tabla mencionada, la nota 3 y la nota 4 recomiendan recurrir al fabricante para definir los valores de este factor.

En el catálogo utilizado para el diseño, el fabricante Benthlehem recomienda usar conexiones del tipo “swaged open socket” (empalme abierto prensado), la tabla 3.2.1 del estándar ASCE 19-96 señala que el factor de reducción es de 1.0 para este tipo de conexión en diámetros menores a 2 pulgadas. En general para conexiones del tipo “open and close socket” la eficiencia promedio es de 100% (Reclamation, 2009). Por lo tanto, el factor de reducción, que se asumió para el presente trabajo, es de $\phi_f = 1.0$.

4.5 Resultados y Análisis

En base a todo lo expuesto anteriormente, la estructura se sometió a los casos de combinaciones de carga para cada método, los siguientes resultados engloban datos de importancia de la primera etapa tales como:

- Resultados del dimensionamiento de los elementos.
- Nivel de pretensado en los elementos.
- Desplazamiento nulo de los nodos y cargas axiales en estado solo de pretensado.
- Desplazamientos de los nodos bajo la acción de los casos de carga.
- Cargas axiales en los elementos y relación demanda/capacidad.
- Diagramas de fuerzas axiales y deformaciones de la estructura.

4.5.1 Diseño de los Elementos

Como se indicó anteriormente en los grupos de simetría de la cubierta, los elementos a continuación designados con L, M, N y O son los comprimidos (barras), y los designados con las letras desde la A hasta la F son los traccionados (cables). En la Tabla 4.9 y en la Tabla 4.10 se presenta el dimensionamiento de los elementos resultado del diseño.

Elementos Comprimidos:

La Tabla 4.9 muestra las dimensiones de diseño de los componentes comprimidos.

Tabla 4.9 Dimensiones de diseño de los elementos comprimidos.

Elemento	Diámetro (mm)	Espesor (mm)	Densidad lineal (kg/m)	Longitud (m)
----------	------------------	-----------------	------------------------------	-----------------

L	508	12	147	14
M	323.9	10	77.4	12
N	219.1	10	51.6	10
O	508	10	123	10

Elementos Traccionados:

La columna "Número de Cables" de la Tabla 4.10 indica el número de elementos requerido para soportar las cargas en la posición de cada grupo de simetría. Se presentan las propiedades del cable individual y las del grupo de cables que forman el elemento.

Tabla 4.10 Dimensiones de diseño de los elementos traccionados.

Elemento	Número de Cables (#)	Cable Individual			Total		
		Diámetro (mm)	Área metálica aprox. (cm ²)	Carga de rotura (Ton)	Área metálica aprox. (cm ²)	Carga de rotura (Ton)	Densidad lineal (kg/m)
A	4	95	54.39	822	218	3288	176
B	2	79	37.81	584	76	1168	61
C	1	73	32.00	494	32	494	26
D	2	79	37.81	584	76	1168	61
E	1	89	47.42	724	47	724	38
F	1	73	32.00	494	32	494	26
G	1	52	16.45	261	16	261	13
H	2	98	58.06	878	116	1756	94
I	1	83	40.90	625	41	625	33
J	1	54	17.48	277	17	277	14
K	1	51	15.48	245	15	245	13

El peso de la estructura, considerando solo los componentes estructurales de las tablas anteriores, es de 191.5 Toneladas. Con la membrana tensada se tiene un peso aproximado de 225.3 Toneladas. El área cubierta por la estructura es de 16875 m². Entonces el peso del domo más la membrana tensada representa alrededor de 13.4 kg/m². Esto sin considerar el peso del anillo de compresión que puede ser de hormigón armado o acero.

4.5.2 Nivel de Pretensado en los Elementos

En la Tabla 4.11 se presentan las fuerzas de pretensado para los elementos, corresponden al modo de pretensado de la estructura obtenido con el método de la doble descomposición en valores singulares implementado en Matlab (ver Tabla 3.4).

Tabla 4.11 Fuerzas internas de pretensado para la estructura.

Elemento	Fuerza interna inicial (Ton)
A	830.2
B	322.4
C	203.1
D	458.7
E	270.9
F	161.3
G	81.6
H	458.7
I	179.2
J	110.4
K	81.6
L	-160.5
M	-65.3
N	-33.6
O	-252.4

4.5.3 Desplazamiento de los Nodos y Cargas Axiales en Estado de Pretensado

Desplazamientos:

En la Figura 4.3 a continuación se presenta la designación de nodos en la estructura para la presentación de resultados. Corresponden a los nodos en los extremos inferior y superior de los elementos comprimidos.

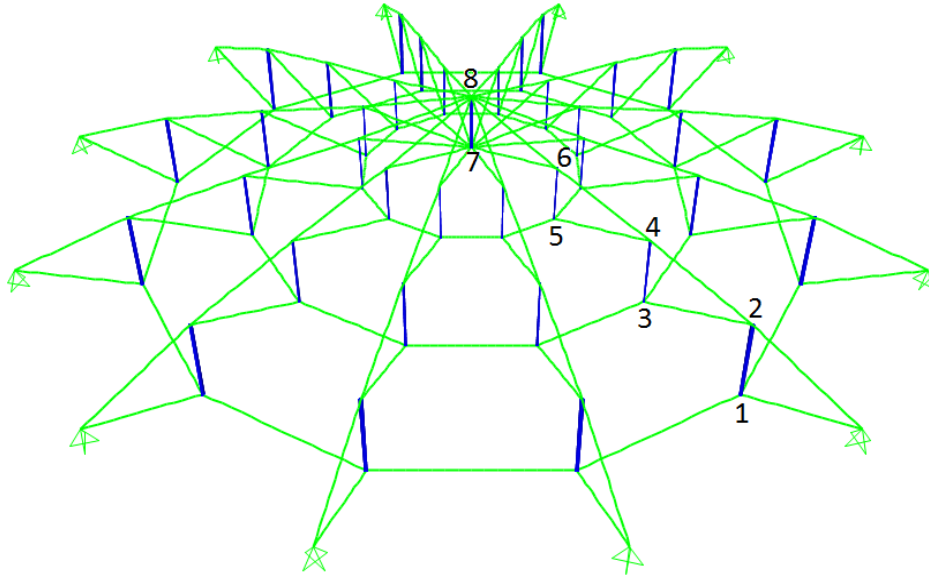


Figura 4.3 Modelo de la estructura en CSI Bridge y designación de los nodos.

La Tabla 4.12 muestra el desplazamiento de los nodos indicados, bajo el caso de carga de solo pretensado, es una tabla de resultados directa del software CSI Bridge, se puede observar que los desplazamientos son prácticamente nulos ya que la distribución de pretensado corresponde al estado de auto equilibrio.

Tabla 4.12 Desplazamientos nodales resultado del análisis bajo el caso de pretensado.

TABLE: Joint Displacements						
Joint	Output Case	Case Type	Step Type	U1	U2	U3
Text	Text	Text	Text	m	m	m
1	pretensión	NonStatic	Max	0	0	0
1	pretensión	NonStatic	Min	-0.000026	-0.000044	-0.000228
2	pretensión	NonStatic	Max	0.000027	0.000016	0
2	pretensión	NonStatic	Min	0	0	-0.000226
3	pretensión	NonStatic	Max	0	0	0
3	pretensión	NonStatic	Min	-0.000005986	-0.00001	-0.000441
4	pretensión	NonStatic	Max	0.000035	0.00002	0
4	pretensión	NonStatic	Min	0	0	-0.000441
5	pretensión	NonStatic	Max	0.000012	0.00002	0
5	pretensión	NonStatic	Min	0	0	-0.000478
6	pretensión	NonStatic	Max	0.000007048	0.000004069	0
6	pretensión	NonStatic	Min	0	0	-0.000479
7	pretensión	NonStatic	Max	0	0	0
7	pretensión	NonStatic	Min	-9.491E-14	-1.421E-13	-0.000568
8	pretensión	NonStatic	Max	0	0	0
8	pretensión	NonStatic	Min	-3.637E-14	-7.691E-14	-0.000564

Fuerzas Axiales:

La Figura 4.4 muestra los diagramas de fuerzas axiales de los elementos de la estructura bajo la acción del pretensado.

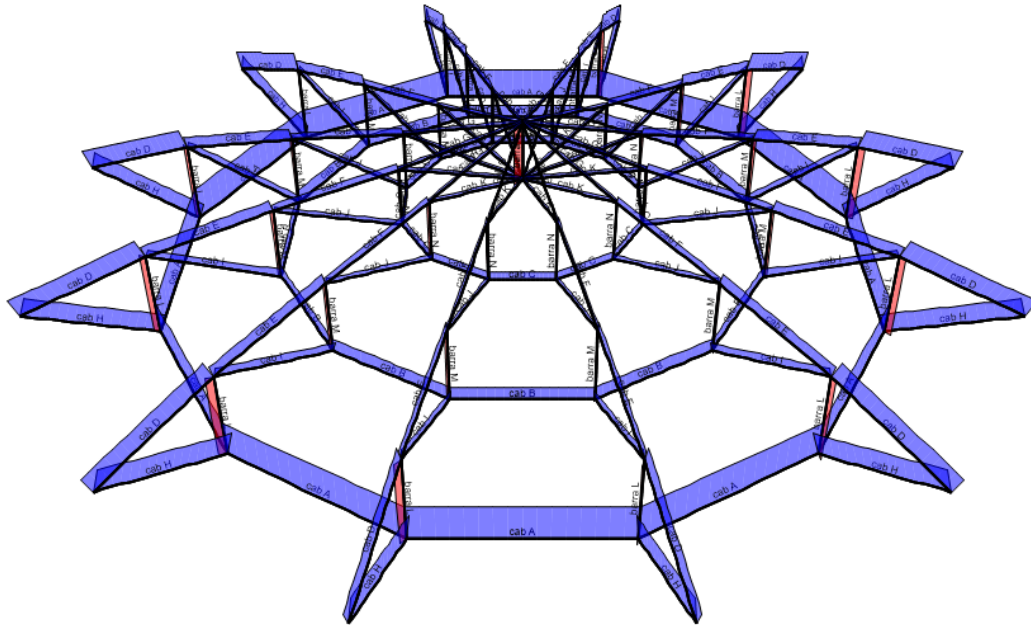


Figura 4.4 Diagrama de fuerzas internas bajo el caso de pretensado.

En teoría los desplazamientos nodales bajo la acción de la carga de pretensado deben ser nulos y las fuerzas internas deben ser las mostradas en la Tabla 4.11, sin embargo por el cálculo numérico del programa estos valores varían ligeramente. Estas variaciones de desplazamientos se muestran en la Tabla 4.12 con la designación de nodos mostrada en la Figura 4.3. La variación máxima entre las fuerzas internas obtenidas en el programa y las de la distribución teórica es de alrededor de 260 kgf, que es un valor relativamente pequeño comparado con las cargas de pretensado, dicha diferencia representa el 0.05 % de la carga de pretensado en el caso más desfavorable.

Esta diferencia se debe en parte a la relación de rigidez de los elementos, es decir, si ingresamos elementos con rigidez muy alta (prácticamente indeformables) la distribución de las cargas de la estructura se acerca más a la teórica.

4.5.4 Desplazamientos de los Nodos Bajo la Acción de las Combinaciones de Cargas

A continuación se presenta las deflexiones en los nodos de la estructura bajo los casos de carga de servicio consideradas en el diseño. La designación de los nodos es la mostrada en la Figura 4.3.

Tabla 4.13 Deflexión de los nodos para los casos de cargas de servicio.

Nodo					Casos Asimétricos			
	D+P	D+P+Lr	D+P+W	D+P+Lr+W	D+P+Lr	D+P	D+P+Lr+W	D+P+W
	(m)	(m)	(m)	(m)	izq	der	izq	der
1	-0.034	-0.338	0.076	-0.123	-0.757	0.391	-0.664	0.593
2	-0.035	-0.380	0.087	-0.135	-0.790	0.378	-0.677	0.597
3	-0.067	-0.872	0.195	-0.285	-1.519	0.693	-1.128	1.028
4	-0.067	-0.894	0.201	-0.289	-1.537	0.688	-1.136	1.031
5	-0.083	-1.397	0.265	-0.393	-1.634	0.479	-0.983	0.848
6	-0.082	-1.400	0.263	-0.391	-1.638	0.482	-0.988	0.849
7	-0.088	-1.630	0.283	-0.426	-0.614		-0.061	
8	-0.080	-1.598	0.256	-0.400	-0.594		-0.067	
MAX	-0.088	-1.63	0.283	-0.426	0.482	-1.638	1.031	-1.136

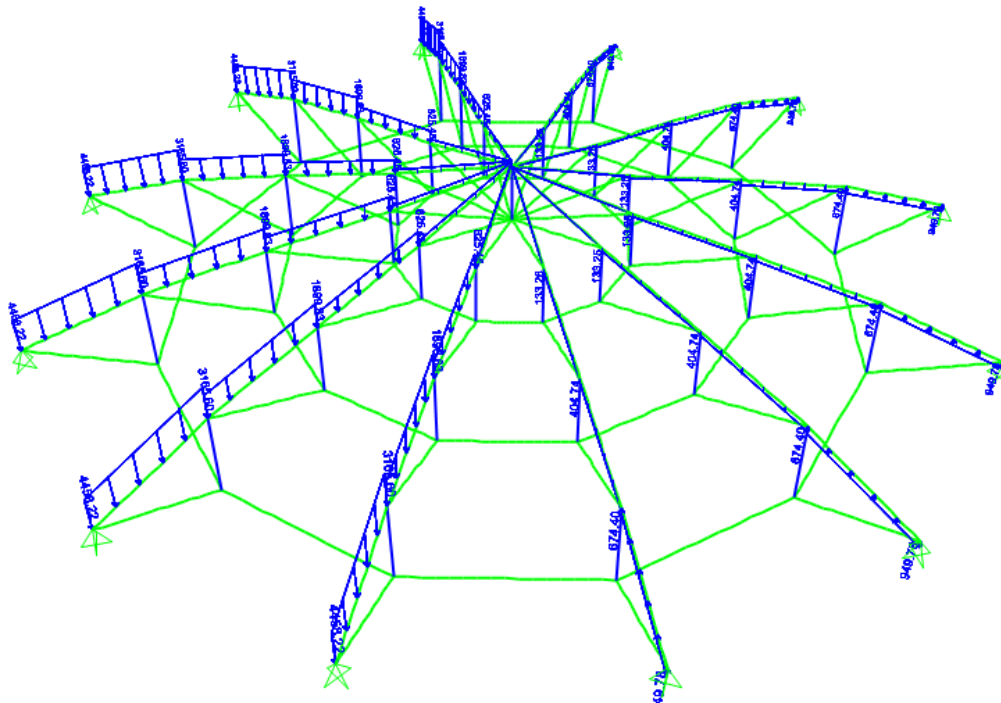


Figura 4.5 Asignación de cargas de servicio en casos asimétricos.

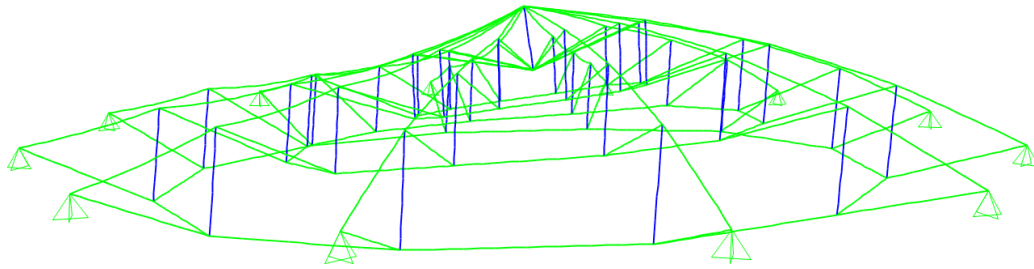


Figura 4.6 Estructura deformada bajo la acción de cargas de servicio, desplazamientos amplificados con un factor de 3.

4.5.5 Fuerzas Axiales en los Elementos Bajo la Acción de las Combinaciones de Cargas

La Tabla 4.14 muestran los valores de fuerza axial de compresión máxima en los elementos L, M, N y O para las 8 combinaciones de carga consideradas para el diseño de estos elementos. Luego de los casos de carga, se presenta una columna con el máximo valor de compresión, entre todos los casos de carga para cada elemento. La penúltima columna de la tabla contiene la capacidad de diseño del elemento, ϕP_n , determinada según el método LRFD descrito en la sección 4.4.1. La última columna de la tabla muestra la relación entre la máxima demanda y la capacidad de diseño del elemento. Esta relación, demanda/capacidad, debe ser como máximo igual a 1.

La Tabla 4.15 muestra los valores de fuerza axial de tracción máxima en los cables, multiplicados por los respectivos factores de mayoración, para las 6 combinaciones de carga consideradas para el diseño de estos elementos. Luego de las tracciones de cada caso, se presenta una columna con el máximo valor de tracción, entre todos los casos de carga para cada elemento. La penúltima columna contiene la capacidad de diseño, S_d , del grupo de cables que conforman el elemento determinada según el estándar ASCE 19-96 (ver sección 4.4.2). La última columna de la tabla muestra la relación demanda/capacidad para los elementos traccionados. Todos los valores de la Tabla 4.15 se refieren al conjunto de cables que conforman el elemento, por ejemplo el elemento A de la estructura está conformado por 4 cables. El número de cables para cada elemento se especificó en la Tabla 4.10 de dimensiones de diseño.



Tabla 4.14 Fuerzas axiales para las combinaciones del diseño LRFD de los elementos a compresión.

Elemento	C.1 (Ton)	C.2 (Ton)	C.3 (Ton)	C.4 (Ton)	C.5 (Ton)	C.6 (Ton)	C.7 (Ton)	C.8 (Ton)	Máximo (Ton)	Resistencia de Diseño (Ton)	Demanda/ Capacidad
L	-1661	-2092	-3285	-1578	-1262	-2027	-2856	-1570	-3285	-3849	0.85
M	-650	-785	-1233	-630	-560	-778	-1098	-645	-1233	-1389	0.89
N	-316	-311	-441	-326	-370	-344	-465	-372	-465	-600	0.78
O	-2209	-1515	-1511	-2455	-3469	-1918	-2136	-2990	-3469	-4031	0.86

Tabla 4.15 Fuerzas axiales mayoradas correspondientes al diseño de los elementos traccionados.

Elemento	T.1 (Ton)	T.2 (Ton)	T.3 (Ton)	T.4 (Ton)	T.5 (Ton)	T.6 (Ton)	Máximo (Ton)	Resistencia de Diseño (Ton)	Demanda/ Capacidad
A	1952	3104	1408	2075	2597	1877	3104	3288	0.94
B	721	1072	578	736	913	699	1072	1168	0.92
C	429	466	453	370	447	443	466	494	0.94
D	966	1029	1063	821	1025	1027	1063	1168	0.91
E	547	414	711	396	499	623	711	724	0.98
F	316	160	461	196	254	390	461	494	0.93
G	158	62	241	90	115	202	241	261	0.92
H	1080	1728	778	1150	1456	1050	1728	1756	0.98
I	402	603	321	410	517	393	603	625	0.96
J	233	255	246	201	247	239	255	277	0.92
K	162	96	223	106	138	191	223	245	0.91

4.6 Análisis no Lineal de Pandeo

Se trata de un análisis no lineal con grandes desplazamientos extendido hasta el valor de carga que produce la inestabilidad por pandeo de la estructura. Éste puede contener además otros tipos de no linealidad, como la del material e incluir los defectos de fabricación de los elementos.

Con los elementos dimensionados en base al modelo de la primera etapa, se realizó un segundo modelo de la estructura usando para los componentes comprimidos elementos de tipo “beam” (viga). Estos elementos permiten tener en cuenta los efectos de flexión lateral, es decir, el pandeo de los elementos comprimidos.

Para aplicaciones de ingeniería no es suficiente determinar que la estructura es estable para un conjunto de cargas. Es necesario extender el análisis hasta establecer la carga bajo la cual se produce la inestabilidad de uno o más de sus componentes, esto permite especificar el factor de seguridad ante la inestabilidad de la estructura (ANSYS, n.d.).

En el programa de elementos finitos cuando la carga a la que se somete un elemento es perfectamente axial las deflexiones fuera del eje, necesarias para iniciar el pandeo, no se desarrollan y el análisis fallará en la predicción de la carga que produce la inestabilidad. Para resolver este problema es necesario ingresar pequeñas perturbaciones iniciales que generen dichas deflexiones, estas perturbaciones pueden ser fuerzas o geometrías iniciales con pequeños desplazamientos fuera del eje del elemento (ANSYS, n.d.). Resulta complicado cuantificar la magnitud de la fuerza inicial que debe aplicarse para producir la respuesta de pandeo, esta carga puede llegar a tener un valor considerable a tal punto de cambiar las condiciones del problema. La opción que mejor se adapta es la de suponer geometrías con pequeñas perturbaciones iniciales, la magnitud de estas perturbaciones puede elegirse en base a las tolerancias de fabricación de los elementos reales.

La forma de la geometría inicial, expuesta en el párrafo anterior, se decide en base a la forma que asumiría el elemento pandeado. Estas formas dependen de sus condiciones de apoyo y de carga. Para condiciones de apoyo comunes y cargas axiales, la Tabla 4.8 muestra con línea discontinua la directriz de los elementos deformados por pandeo. Otra manera de determinar las formas o modos de pandeo es mediante un análisis lineal o de autovalores del pandeo del elemento o estructura.

En el modelo de la segunda etapa de análisis las propiedades mecánicas de los materiales fueron las mismas que en el modelo de la primera etapa. Los componentes comprimidos se modelaron con una directriz alejada 5mm en el punto medio de la línea recta que une los extremos, $\Delta=5\text{mm}$ en la Figura 4.7(b). Para determinar este valor se modeló una columna en condiciones de apoyo articulado en los dos extremos y con las dimensiones determinadas en el diseño de las barras del grupo L de la estructura, Figura 4.7(a) con $L=14\text{m}$. Se

determinó la carga de pandeo de esta columna en tres estados de perturbación inicial, con su directriz a 10, 5 y 1 mm alejada de la recta en el centro, $\Delta=10\text{mm}$, $\Delta=5\text{mm}$ y $\Delta=1\text{mm}$ en la Figura 4.7(b). Los resultados de este análisis preliminar mostraron que para los tres valores de Δ se puede obtener prácticamente la misma carga de pandeo y por lo tanto, se puede optar por cualquiera de estos desplazamientos iniciales.

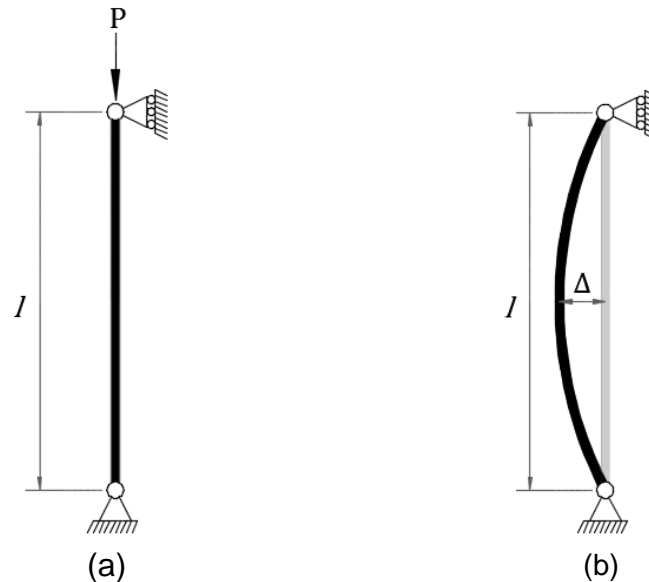


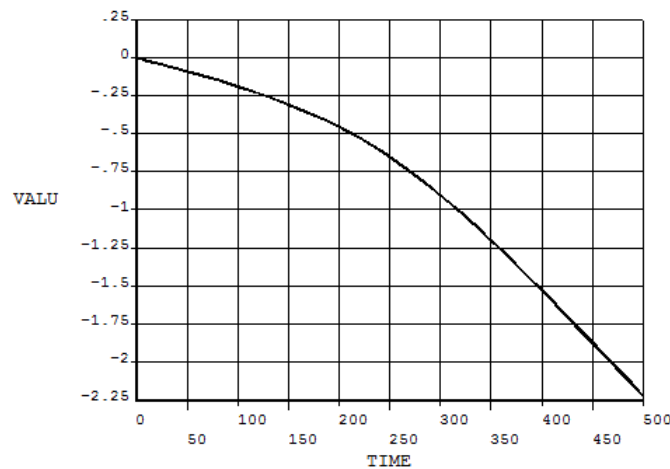
Figura 4.7 Barra comprimida biarticulada, para el ejemplo de análisis no lineal de pandeo.
(a) Condiciones del problema. (b) Perturbación inicial en la geometría.

Debido a que debe extenderse el análisis hasta alcanzar la carga de inestabilidad se asume una carga de referencia. Entonces se considera un *Factor de Carga* que es el número de veces que se alcanza la carga de referencia cuando inicia la inestabilidad. En el presente trabajo se tomaron los 8 casos de carga del método LRFD como cargas de referencia y se establecieron los factores de carga para la inestabilidad para cada uno de estos casos.

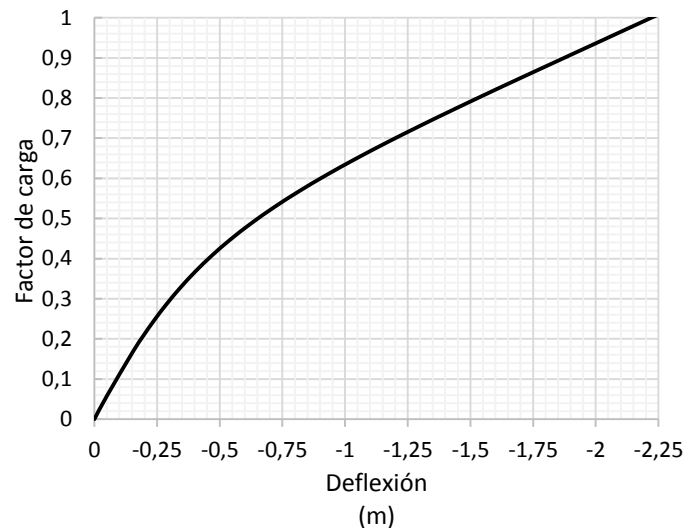
ANSYS permite visualizar el proceso de análisis no lineal mediante gráficos de variables en función de un “tiempo”. Este parámetro “tiempo” es proporcional a la aplicación progresiva de las cargas en el análisis no lineal, es decir, representa el progreso del análisis no lineal que aplica la carga en pequeños incrementos hasta alcanzar el total. Se muestra por ejemplo, en la Figura 4.8(a) el gráfico del desplazamiento vertical del nodo superior (nodo 8 en la Figura 4.3), para la aplicación del caso C.3 de carga en la primera etapa. En este ejemplo se puede apreciar el comportamiento no lineal de la estructura.

La Figura 4.8 compara el gráfico obtenido directamente en ANSYS, Figura 4.8(a), con el gráfico de la deflexión en función del factor de carga, Figura 4.8(b). Se puede observar que los valores correspondientes al eje “TIME” son proporcionales al factor de carga. De este modo, el valor de $\text{TIME}=500$ corresponde al factor de carga 1. Al final del análisis del caso C.3 se llega a un factor de carga de 1 debido a que la carga de referencia es el propio caso C.3. El valor de tiempo al final del análisis se especifica por el usuario y se relaciona

con el número de incrementos de carga, es decir, a valores mayores de tiempo al final del análisis los incrementos de carga son de menor magnitud, lo que aumenta la precisión del análisis.



(a) Gráfico obtenido en ANSYS.



(b) Deflexión del nodo en función del factor de carga, la carga de referencia es el caso C.3 por lo que al final del proceso se alcanza un factor de carga=1

Figura 4.8 Gráfico del desplazamiento vertical del nodo superior del elemento central de la estructura para el caso de carga C.3. (a) gráfico obtenido en ANSYS. (b) deflexión del nodo en función del factor de carga, la carga de referencia es el caso C.3.

Usando los gráficos antes descritos se puede identificar el factor de carga de inestabilidad evaluando los desplazamientos de nodos específicos e identificando la zona de la gráfica en la que existe un aumento súbito del desplazamiento del nodo considerado. Para determinar que desplazamientos analizar y en que nodos, resulta útil extender el análisis más allá del inicio de la inestabilidad y observar la estructura deformada, entonces resulta evidente qué elementos son los que se pandean y conviene analizar a detalle.

Como ejemplo se aplica el proceso a la barra biarticulada de la Figura 4.7 con $l = 14\text{m}$, $\Delta = 5\text{mm}$ y la sección transversal correspondiente a los elementos del

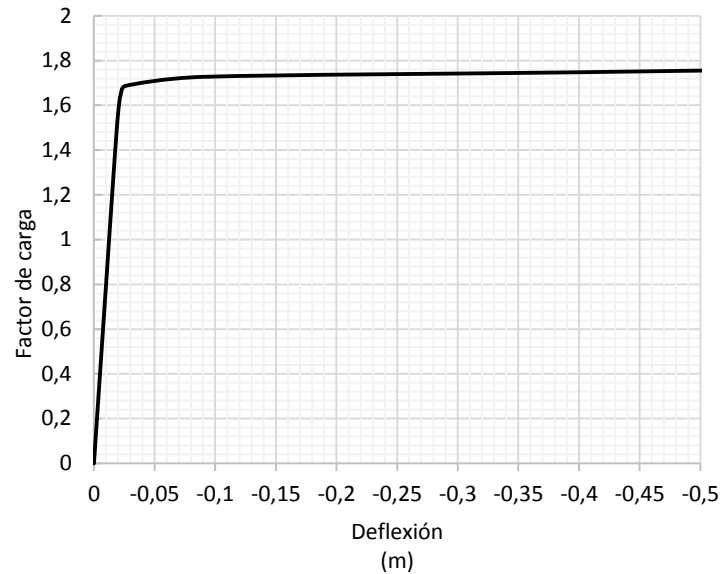
grupo de simetría L, Tabla 4.9. Se aplica una carga total de $P=7000\text{kN}$, tomando una carga de referencia de 3500kN , de este modo el factor de carga total que se aplica es de $7000/3500=2$. La geometría de la barra pandeada corresponde a la de la Figura 4.7(b). Entonces, los desplazamientos que conviene analizar son: el desplazamiento vertical del extremo superior y el desplazamiento lateral del punto central de la barra; las gráficas de estos desplazamientos se muestran en la Figura 4.9(a) y (b) respectivamente.

En la Figura 4.9(a) se observa que al inicio el desplazamiento vertical del nodo cambia de manera uniforme con los aumentos de carga, con una tasa de variación pequeña, hasta que alrededor del factor de carga de 1.68 el desplazamiento tiene un cambio súbito luego del cual hay grandes desplazamientos para pequeños aumentos de carga, entonces se puede determinar que en dicho valor ocurre la pérdida de estabilidad y el factor de carga correspondiente es el valor de inestabilidad. Para poder determinar ese punto de la gráfica con precisión suficiente es necesario que los incrementos de carga sean pequeños, de otro modo la gráfica se presentaría como un conjunto de segmentos de recta en los que será difícil determinar un punto de cambio.

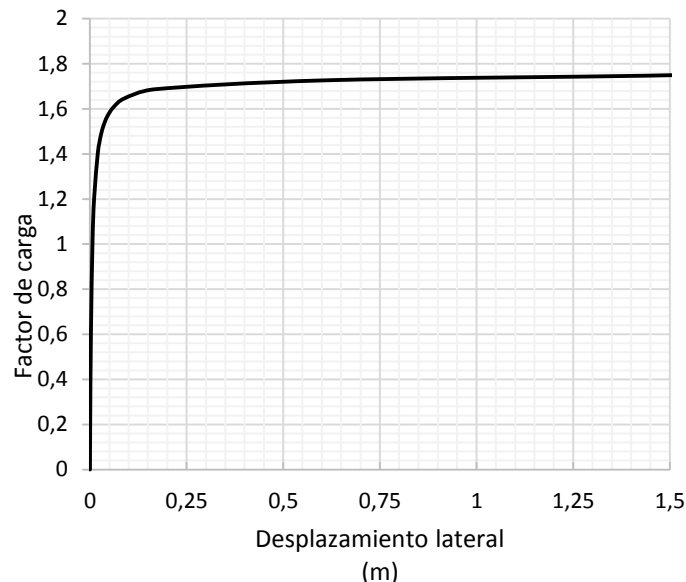
En la Figura 4.9(b) el comportamiento general del desplazamiento lateral es parecido al de la Figura 4.9(a), sin embargo, cerca de la zona de inestabilidad se observa un cambio ligeramente gradual entre el comportamiento estable (pequeños desplazamientos para los incrementos de carga) y el inestable (grandes desplazamientos para los incrementos de carga). En este caso, conviene por seguridad tomar el factor de carga al inicio de la transición como el valor de inestabilidad, siguiendo este criterio se puede fijar en el gráfico de la Figura 4.9(b) el valor de 1.5 como el factor de carga para la inestabilidad.

De los valores obtenidos en las dos gráficas se toma el menor, es decir, el factor de carga de inestabilidad para el ejemplo es de 1.5 que corresponde a una carga de $P=1.5 \times (3500)=5250\text{kN}$.

Resulta interesante comparar el valor obtenido del análisis, $P=5250\text{kN}$, del ejemplo con el obtenido mediante la fórmula de Euler de la teoría elástica, $P_{\text{Euler}}=6050.8\text{kN}$, para el mismo ejemplo. En general los valores de carga crítica de un análisis no lineal de pandeo son menores a los valores de carga crítica de Euler.



(a) Deflexión vertical del extremo superior.



(b) Desplazamiento lateral del punto central de la barra.

Figura 4.9 Respuesta de la barra biarticulada de la Figura 4.7 del ejemplo, ante la aplicación de una carga de 7000kN (a) Deflexión vertical del extremo superior. (b) Desplazamiento lateral del punto central de la barra.

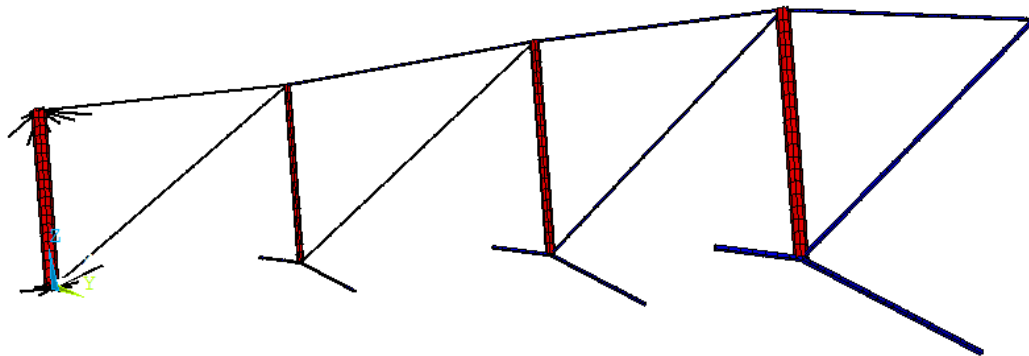
Caso de carga C.3:

Se expone a continuación el proceso de la determinación del factor de carga, para la pérdida de estabilidad, en el caso C.3. Se eligió este caso para ejemplificar el proceso debido a que resultó en el menor factor de carga en la pérdida de estabilidad. Posteriormente en la Tabla 4.16 se presentan los factores de carga para los demás casos.

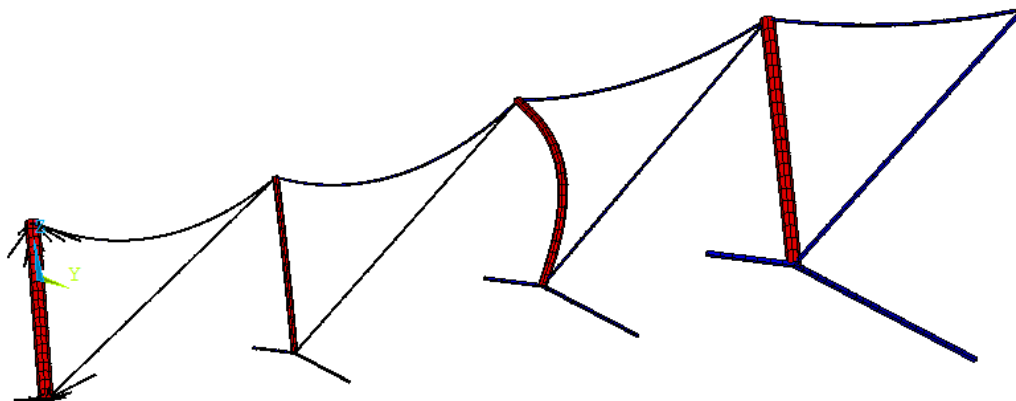
El análisis con la aplicación del caso C.3 con un factor de carga de 2 mostró en la estructura deformada, Figura 4.10(b) y (c), que los elementos que se

pandearon fueron los M. Se evaluó la gráfica de la deflexión vertical de los nodos superiores de cada barra, Figura 4.11(a), y la gráfica del desplazamiento lateral del nodo central del elemento M Figura 4.11(b). De este análisis, se determinó que la pérdida de estabilidad inicia para el factor de carga de 1.5. Este valor marca el inicio de la respuesta inestable del elemento M y por lo tanto de la estructura.

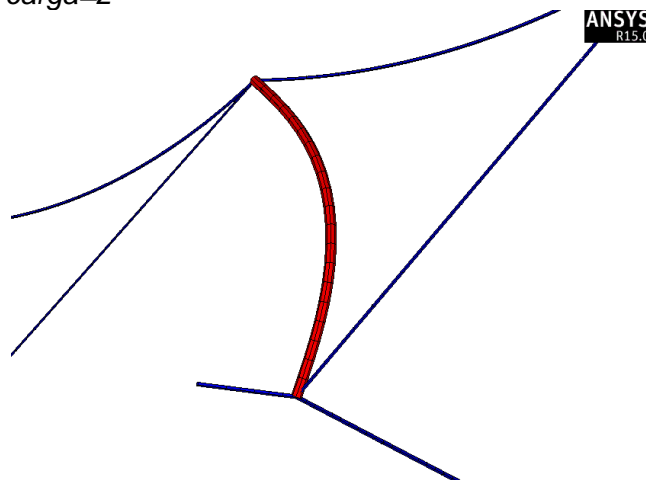
Para facilitar la visualización en la Figura 4.10 se muestra uno de los 12 conjuntos radiales de la estructura, los elementos L, M, N y O se muestran de derecha a izquierda, respectivamente.



(a) Estructura sin deformar. Factor de carga=0

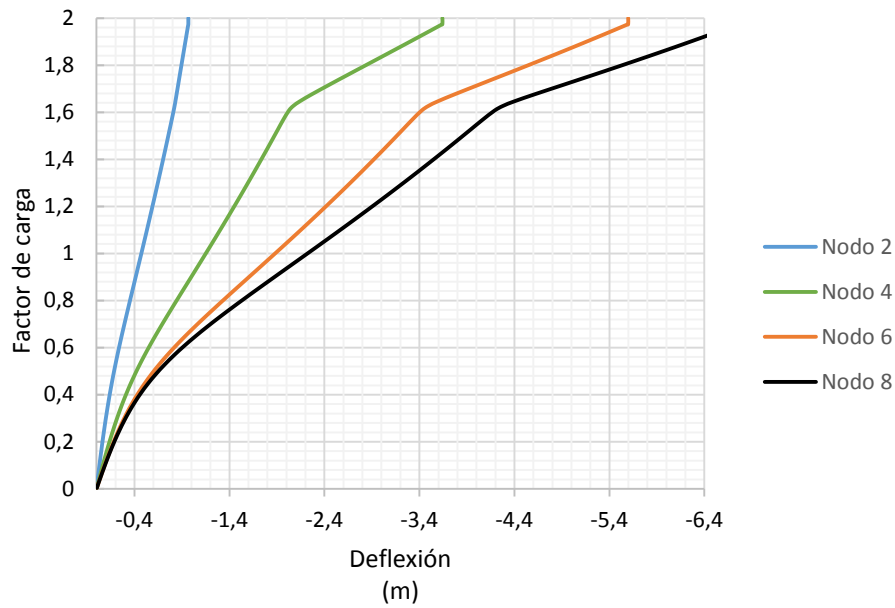


(b) Estructura deformada, etapa posterior a la pérdida de estabilidad. Factor de carga=2

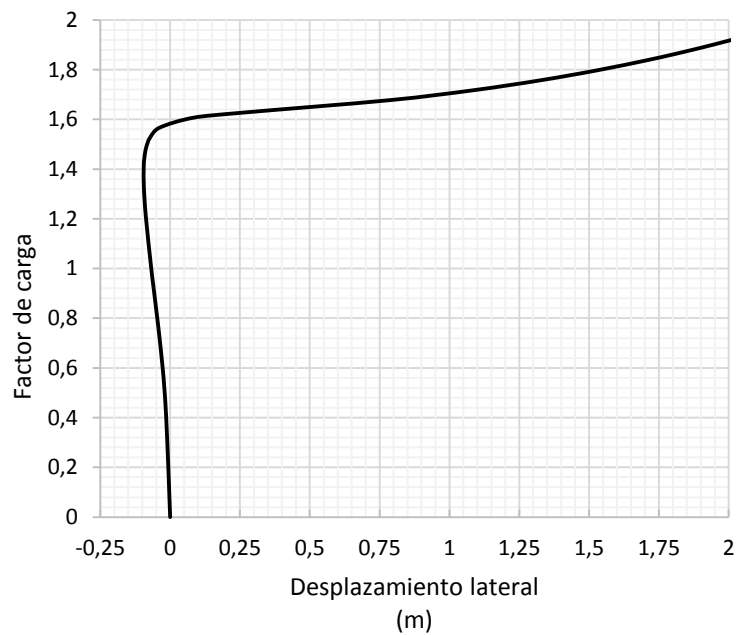


(c) Elemento M, etapa posterior a la pérdida de estabilidad. Factor de carga=2

Figura 4.10 Deformación de la estructura bajo la combinación C.3 con un factor de carga de 2.
(a) Estructura sin deformar. (b) Estructura deformada. (c) Elemento M pandeado.



(a) Deflexión vertical de los nodos, la designación de los nodos corresponde a la Figura 4.3.



(b) Desplazamiento lateral del punto medio del elemento M.

Figura 4.11 Desplazamientos nodales para el análisis no lineal del pandeo del caso C.3.
(a) Deflexión vertical de los nodos, la designación de los nodos corresponde a la Figura 4.3.
(b) Desplazamiento lateral del punto medio del elemento M.

Factores de Carga:

La Tabla 4.16 contiene los factores de carga para las combinaciones consideradas en este análisis. El menor factor de carga obtenido es de 1.5 y corresponde a la combinación C.3. En el caso C.4 el factor de carga se determinó sin afectar el peso propio de la estructura por algún factor adicional al de la combinación, esto se debe a que cuando se corrió el análisis, aumentando toda la combinación, las fuerzas amplificadas de succión del viento y del peso de la estructura causaron que los elementos a compresión trabajen traccionados en la parte superior y comprimidos en la inferior. Extender el análisis del caso C.4 en estas condiciones llevaría a valores del factor de carga sensiblemente mayores al mostrado en la tabla, establecido sin mayorar el peso propio. La última columna de la tabla muestra el elemento que se pandea.

Tabla 4.16 Factores de carga para la pérdida de estabilidad de la estructura.

Combinación	Factor de Carga	Elemento que Controla
C.1	21	M
C.2	3.4	M
C.3	1.5	M
C.4	40	O
C.5	5.6	O
C.6	4.3	M y N
C.7	1.8	N
C.8	8.8	N

5 Conclusiones

La configuración geométrica de la presente propuesta se fundamenta en el hecho de que los domos de cables han sido soluciones exitosas usadas antes en varios proyectos con la necesidad de cubrir grandes luces. Las cubiertas de tensegridad pura (tensegridades cerradas) parecen tener el potencial de ofrecer soluciones estructurales interesantes y eficientes. Llegar a una propuesta de diseño de cubiertas de tensegridad pura requiere aún de varios estudios en futuro que permitan aprovechar su potencial y de validaciones mecánicas, teóricas y físicas de propuestas geométricas existentes en la actualidad.

El resultado de una búsqueda de forma teórica no garantiza que una estructura pueda tener la rigidez necesaria para una determinada aplicación, por lo tanto las validaciones mecánicas numéricas y físicas cumplen un papel importante.

Un objetivo específico del presente trabajo fue llegar a una propuesta de diseño de una cubierta en tensegridad, dicho objetivo se alcanzó satisfactoriamente mediante simulaciones numéricas basadas en la teoría que gobierna el comportamiento mecánico de este tipo de estructuras, llegando al dimensionamiento de los elementos (barras-cables) que la conforman.

El prototipo a escala permitió visualizar el principio estructural y tener una experiencia más cercana a la práctica, la cual se complementa con las bases teóricas adquiridas durante la revisión bibliográfica. La validación del comportamiento estructural mediante modelos a escala requiere de laboratorios equipados adecuadamente que permitan la aplicación de las cargas y una correcta lectura de datos.

El análisis no lineal de pandeo evidencia que la estructura propuesta es poco susceptible a sufrir inestabilidad por pandeo, es decir posee un factor de seguridad alto al pandeo.

Un aspecto importante en la implementación del principio es el análisis del proceso constructivo que debe seguir un programa estricto formulado por el ingeniero estructural para evitar complicaciones, tales como fuerzas generadas durante el ensamblaje que puedan superar la capacidad de los elementos o de las conexiones y otras que representen un riesgo para la estructura en general o peor aún sean un riesgo de seguridad laboral.

Si se considera la aplicación de este tipo de proyecto en nuestro medio una de las principales complicaciones radica en la limitada disponibilidad de tecnología apropiada para el ensamblaje y la falta de experiencia en la construcción de estructuras de este tipo. Adicional a esto podemos resaltar el hecho de que un proyecto de la magnitud propuesta requiere de la importación de los elementos

estructurales lo cual afecta su economía. Sin embargo, esto dependerá de la magnitud de la estructura, proyectos de dimensiones menores a las de la presente propuesta adaptados como soluciones específicas, son posibles.

Aunque el comportamiento de los elementos individuales es simple (solo tracción o solo compresión) la estructura en su conjunto presenta una respuesta geoméricamente no lineal que depende en gran medida del estado de pretensado, por lo tanto encontrar el modo y nivel de pretensado es un paso prioritario en el análisis y diseño. Además debe estudiarse el efecto de la no linealidad de los materiales en el comportamiento de la estructura.

En la determinación de las cargas que se aplicaron en la cubierta se hicieron varias simplificaciones, como la de considerar la carga de viento uniformemente distribuida y la de asumir en la carga muerta solo el peso de la estructura sin tener en cuenta posibles cargas por equipamiento para luminarias y pasos de mantenimiento. Estas cargas para un proyecto específico deberán revisarse adecuadamente.

En las normativas actuales no existen recomendaciones específicas para el diseño y construcción de estructuras en tensegridad debido a que la tipología como sistema estructural es relativamente reciente y sus geometrías son generalmente particulares. Para la presente propuesta se tomaron en cuenta observaciones de proyectos y estudios de varios investigadores.

La simulación del comportamiento estructural de la cubierta se realizó con casos de análisis estático, dejando el análisis dinámico de la misma para estudios futuros que incluyan comportamiento ante cargas sísmicas y respuesta aeroelástica (vibraciones).

Posibles Investigaciones Futuras:

Posibles líneas de investigación futuras incluyen, pero no se limitan a, las siguientes:

- Análisis del comportamiento incluyendo cargas sísmicas, casos de análisis dinámico.
- Estudio de la distribución de las cargas de viento en la cubierta, y la respuesta aeroelástica de la estructura, casos de análisis dinámico.
- Optimización de la geometría para reducir el peso.
- Análisis de la estructura incluyendo la membrana estructural.
- Pruebas de carga sobre modelos físicos de mayor escala, que permitan un mejor control de las dimensiones de los elementos y la carga de pretensado.

6 Bibliografía

- AISC. (2010). Specification for Structural Steel Buildings (ANSI/AISC 360-10). *American Institute of Steel Construction, Chicago-Illinois*.
- ANSYS. (n.d.). Manual de ayuda de ANSYS.
- ASCE. (1996). ASCE 19-96: Structural Applications of Steel Cables for Buildings. American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- ASCE. (2010). Minimum design loads for buildings and other structures. American Society of Civil Engineers, Reston, VA.
- Bethlehem. (2013). Catalogo de Cables.
<http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Blanco Blanch, P. (2010). *Pretensado de columnas Tensegrity para el incremento de rigidez axial*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Blanco Claraco, J. L., González, A., & García Ocaña, J. M.-M. (2012). *Análisis estático de estructuras por el método matricial*. Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga.
- Burkhardt, R. (2004). A practical guide to tensegrity design.
- Charalambides, J. E. (2004). *Computer Method for the Generation of the Geometry of Tensegrity Structures*. University of Texas at Austin.
- CONDESA. (2006). Catálogo de Tubería Estructural.
- Connelly, R., Fowler, P. W., Guest, S. D., Schulze, B., & Whiteley, W. J. (2009). When is a symmetric pin-jointed framework isostatic? *International Journal of Solids and Structures*, 46(3), 762–773.
- Díaz Herrada, N. J. (2014). *Los sistemas de tensegrity: prototipo de un panel interior divisorio*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- European Committee for Standardisation, (CEN). (1997). Cold formed welded structural hollow sections of non-alloy and fine grain steels, 3(February).
- European Committee for Standardisation, (CEN). (2006). Cold formed welded structural hollow sections of non-alloy and fine grain steels. Part 2: Tolerances, dimensions and sectional properties (EN 10219-2:2006), 3.
- Fuller, R. B. (1962). Tensile-integrity structures. Google Patents.
- García Barreno, P. (2009). Tensegridad Arquitectura , arte y biología. *Arquitectura Viva*, 125, 19–31.
- García Zúñiga, F. (2011). Tensegridad y el Estadio Ciudad de la Plata. *Revista La Ingeniería*, 1(1106), 20–24.
- Geiger, D. H., Stefaniuk, A., & Chen, D. (1986). The design and construction of two cable domes for the Korean Olympics. In *Proc. of the IASS Symposium on Shells, Membranes and Space Frames* (Vol. 2, pp. 265–272).

- Guest, S. (2006). The stiffness of prestressed frameworks: a unifying approach. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3), 842–854.
- Jáuregui, V. G. (2004). TENSEGRIDAD, ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN FLOTANTE.
- Jáuregui, V. G. (2007). *Tensegridad: estructuras tensegríticas en ciencia y arte*. Ed. Universidad de Cantabria.
- Lay, D. C., & Murrieta, J. M. (2012). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson education.
- Liapi, K. A., & Kim, J. (2003). A Parametric Approach to the Design of a Tensegrity Vaulted Dome for an Ephemeral Structure for the 2004 Olympics. *Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA 22)*.
- Liapi, K. A., Kim, J., & Liu, R. (2004). Design and Fabrication of Tensegrity Structures a computer based system. *Acadia*, 100–109.
- Motro, R. (2006). *Tensegrity: structural systems for the future*. Ed. Butterworth-Heinemann.
- Pugh, A. (1976). *An introduction to tensegrity*. Univ of California Press.
- Reclamation, B. of. (2009). Reclamation Safety and Health Standards. Bureau of Reclamation.
- Santos Leal, F. (2006). Introducción a las Tensegridades.
- Schek, H.-J. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 115–134.
- Schenk, M. (2005). *Statically balanced tensegrity mechanisms. A literature review*. Department of BioMechanical Engineering. Delft University of Technology.
- Schenk, M., Herder, J. L., & Guest, S. D. (2006). Design of a statically balanced tensegrity mechanism. In *ASME 2006 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (pp. 501–511).
- Tibert, A. G., & Pellegrino, S. (2011). Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, 26(3), 241–255.
- Vassart, N., & Motro, R. (1999). Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems. *International Journal of Space Structures*, 14(2), 147–154.
- Yuan, X., Chen, L., & Dong, S. (2007). Prestress design of cable domes with new forms. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9), 2773–2782.



-
- Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2006). Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18), 5658–5673.
- Zhang, L., Chen, W., & Dong, S. (2007). Initial pre-stress finding procedure and structural performance research for Levy cable dome based on linear adjustment theory. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 8(9), 1366–1372.
- Zhang, Z., Dong, S., & Fu, X. (2008). Structural design of a spherical cable dome with stiff roof. *International Journal of Space Structures*, 23(1), 45–56.

7 Anexos

7.1 ANEXO A: Rigidez de un Sistema Reticular Pretensado

La deducción de la matriz de rigidez tangente de sistemas reticulares pretensados propuesta por Guest (Guest, 2006) parte del planteamiento de las expresiones de equilibrio en los nodos y la diferenciación de estas con respecto a las coordenadas nodales. Se inicia con un elemento individual conectando dos nodos para posteriormente extender esta deducción a una estructura completa. La deducción es igualmente válida en dos o tres dimensiones.

Elemento Individual:

La figura A.1 muestra un elemento individual libre en el espacio. Las fuerzas \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 están en equilibrio con la tensión interna t en el elemento, \mathbf{f}_1 y \mathbf{f}_2 son vectores bidimensionales o tridimensionales con componentes f_{1i} y f_{2i} respectivamente. Los nodos conectados por el elemento tienen vectores de posición \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 de componentes x_{1i} y x_{2i} respectivamente. El elemento en la configuración mostrada tiene una longitud l , y el vector unitario $\mathbf{n} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/l$ es paralelo al elemento.

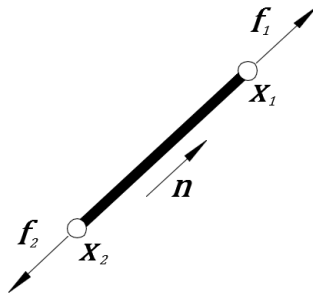


Figura A.1: Elemento individual libre en el espacio.

El equilibrio de los nodos 1 y 2 en forma vectorial viene dado por:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{n}t \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{n}t \quad (\text{A.2})$$

Se puede expresar el equilibrio en términos del *coeficiente de tensión* del elemento, $\hat{t} = t/l$:

$$f_1 = (x_1 - x_2)\hat{t} \quad (A.3)$$

$$f_2 = (-x_1 + x_2)\hat{t} \quad (A.4)$$

Que expresado en función de las componentes de los vectores resulta en:

$$f_{1i} = (x_{1i} - x_{2i})\hat{t} \quad (A.5)$$

$$f_{2i} = (-x_{1i} + x_{2i})\hat{t} \quad (A.6)$$

Mediante la diferenciación de las expresiones de equilibrio de las componentes, (A.5) y (A.6), con respecto a la j -ésima coordenada del nodo 1 se obtiene:

$$\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_{1j}} = (x_{1i} - x_{2i}) \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{1j}} + \delta_{ij} \hat{t} \quad (A.7)$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{1j}} = (-x_{1i} + x_{2i}) \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{1j}} - \delta_{ij} \hat{t} \quad (A.8)$$

en donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. De manera similar diferenciando las expresiones (A.5) y (A.6) con respecto a la j -ésima coordenada del nodo 2 se tiene:

$$\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_{2j}} = (x_{1i} - x_{2i}) \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{2j}} - \delta_{ij} \hat{t} \quad (A.9)$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{2j}} = (-x_{1i} + x_{2i}) \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{2j}} + \delta_{ij} \hat{t} \quad (A.10)$$

Para simplificar las expresiones (A.7)-(A.10) se expande la tasa de variación del coeficiente de tensión con respecto a la posición del nodo. Se asume que la tensión en el elemento varía solo con respecto a su longitud, entonces se tiene que:

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{1j}} = \frac{\partial \hat{t}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x_{1j}}; \quad \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{2j}} = \frac{\partial \hat{t}}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x_{2j}} \quad (A.11)$$

por geometría se plantea que:

$$\frac{\partial l}{\partial x_{1j}} = n_j; \quad \frac{\partial l}{\partial x_{2j}} = -n_j \quad (A.12)$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{1j}} = \frac{\partial \hat{t}}{\partial l} n_j; \quad \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{2j}} = -\frac{\partial \hat{t}}{\partial l} n_j \quad (A.13)$$

La tasa de variación del coeficiente de tensión con respecto a la longitud, $d\hat{t}/dl$, puede expresarse como:

$$\frac{d\hat{t}}{dl} = \frac{d\left(\frac{t}{l}\right)}{dl} = \frac{1}{l} \frac{dt}{dl} - \frac{t}{l^2} = \frac{1}{l} \left(\frac{dt}{dl} - \hat{t} \right) \quad (\text{A.14})$$

En donde dt/dl es la tasa de variación de la tensión con respecto a la longitud del elemento, es decir, su rigidez axial. Para un elemento lineal elástico de sección transversal A modulo elástico E y longitud inicial l_0 , suponiendo pequeñas deformaciones, se tiene que $dt/dl = AE/l_0$. Si se define $g = dt/dl$ se obtiene:

$$\frac{d\hat{t}}{dl} = \frac{g - \hat{t}}{l} \quad (\text{A.15})$$

Para simplificar la notación se define la *rigidez axial modificada*, $\hat{g} = g - \hat{t}$, con lo que se tiene:

$$\frac{d\hat{t}}{dl} = \frac{\hat{g}}{l} \quad (\text{A.16})$$

Sustituyendo (A.16) en (A.13) se obtiene:

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{1j}} = \frac{\hat{g} n_j}{l}; \quad \frac{\partial \hat{t}}{\partial x_{2j}} = -\frac{\hat{g} n_j}{l} \quad (\text{A.17})$$

y por lo tanto las expresiones de rigidez (A.7)-(A.10) pueden expresarse como:

$$\frac{\partial f_{1i}}{\partial x_{1j}} = n_i \hat{g} n_j + \delta_{ij} \hat{t}; \quad \frac{\partial f_{1i}}{\partial x_{2j}} = -n_i \hat{g} n_j - \delta_{ij} \hat{t} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{1j}} = -n_i \hat{g} n_j - \delta_{ij} \hat{t}; \quad \frac{\partial f_{2i}}{\partial x_{2j}} = n_i \hat{g} n_j + \delta_{ij} \hat{t} \quad (\text{A.19})$$

o en forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_1} = \mathbf{n} \hat{g} \mathbf{n}^T + \hat{t} \mathbf{I}; \quad \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}_2} = -\mathbf{n} \hat{g} \mathbf{n}^T - \hat{t} \mathbf{I} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_1} = -\mathbf{n} \hat{g} \mathbf{n}^T - \hat{t} \mathbf{I}; \quad \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_2} = \mathbf{n} \hat{g} \mathbf{n}^T + \hat{t} \mathbf{I} \quad (\text{A.21})$$

en donde \mathbf{I} es la matriz identidad de orden 2×2 o 3×3 para el caso bidimensional o tridimensional respectivamente.

Entonces la matriz de rigidez tangente para un elemento individual, K_s , que relaciona pequeños cambios en la posición de los nodos con pequeños cambios en las fuerzas nodales

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \quad (A.22)$$

esta dada por:

$$K_s = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -\mathbf{n} \end{bmatrix} [\hat{g}] \begin{bmatrix} \mathbf{n}^T & -\mathbf{n}^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (A.23)$$

La ecuación (A.23) puede expresarse como:

$$K_s = \mathbf{a}_s [\hat{g}] \mathbf{a}_s^T + S_s \quad (A.24)$$

en donde \mathbf{a}_s es la *matriz de equilibrio* del elemento individual

$$\mathbf{a}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ -\mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (A.25)$$

y S_s es la *matriz de esfuerzo* del elemento

$$S_s = \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (A.26)$$

Estructura completa:

Se puede encontrar la matriz de rigidez tangente para la estructura completa por adición de las matrices de rigidez de los elementos individuales que la conforman. Para esto se requiere que las matrices de rigidez tangente de los elementos individuales estén planteadas en un sistema de coordenadas globales común a toda la estructura.

Para una estructura compuesta de n nodos se define el vector de fuerzas nodales externas \mathbf{f} y el vector de coordenadas nodales \mathbf{x} como:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (A.27)$$

en donde f_i es el vector de fuerza bidimensional o tridimensional actuando en el nodo i , y x_i es el vector posición bidimensional o tridimensional del nodo i .

Considerando un elemento p que conecta a los nodos i y j con longitud l_p , con una tensión interna t_p , un coeficiente de tensión \hat{t}_p , y que tiene una rigidez axial modificada \hat{g}_p . El vector unitario \mathbf{n}_{ij} paralelo al elemento p es:

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{l_p} = -\mathbf{n}_{ji} \quad (\text{A.28})$$

La matriz de equilibrio \mathbf{a}_p del elemento individual tiene todas las componentes cero excepto por aquellas correspondientes a los nodos i y j conectados por la barra p ,

$$\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{p1} \\ \mathbf{a}_{p2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{pn} \end{bmatrix}; \mathbf{a}_{pi} = \mathbf{n}_{ij}; \mathbf{a}_{pj} = \mathbf{n}_{ji} = -\mathbf{n}_{ij}; \mathbf{a}_{pk} = \mathbf{0} \text{ si } k \neq i \text{ y } k \neq j \quad (\text{A.29})$$

La matriz de esfuerzos para el elemento individual p que conecta a los nodos i y j , en el sistema de coordenadas global, se puede definir en términos de submatrices $\mathbf{s}_{p_{lm}}$ de orden 2×2 en el caso bidimensional o de 3×3 en el tridimensional,

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{p_{11}} & \mathbf{s}_{p_{12}} & \cdots & \mathbf{s}_{p_{1n}} \\ \mathbf{s}_{p_{21}} & \mathbf{s}_{p_{22}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{s}_{p_{n1}} & & & \mathbf{s}_{p_{nn}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.30})$$

donde

$$\mathbf{s}_{p_{ii}} = \mathbf{s}_{p_{jj}} = \hat{t}_p \mathbf{I}; \mathbf{s}_{p_{ij}} = \mathbf{s}_{p_{ji}} = -\hat{t}_p \mathbf{I}$$

en todos los demás casos $\mathbf{s}_{p_{lm}} = \mathbf{0}$.

La matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_p del elemento p se puede expresar en términos de las coordenadas globales retomando la forma de la ecuación (A.24):

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{a}_p [\hat{g}_p] \mathbf{a}_p^T + \mathbf{S}_p \quad (\text{A.31})$$

Considerando una estructura formada por b elementos. La matriz de rigidez tangente total \mathbf{K} puede determinarse por la adición de las matrices de rigidez tangente de cada elemento:

$$\mathbf{K} = \sum_{p=1}^b \mathbf{K}_p = \sum_{p=1}^b \mathbf{a}_p [\hat{g}_p] \mathbf{a}_p^T + \sum_{p=1}^b \mathbf{S}_p \quad (\text{A.32})$$

La cual puede expresarse en forma matricial:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{A}^T + \mathbf{S} \quad (\text{A.33})$$

en donde \mathbf{A} es la matriz de equilibrio de toda la estructura

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_b] \quad (\text{A.34})$$

$\hat{\mathbf{G}}$ es la matriz diagonal de rigideces axiales modificadas de los elementos,

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 & & & \\ & \hat{g}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{g}_b \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

y \mathbf{S} es la matriz de esfuerzo de la estructura entera. \mathbf{S} puede ser definida en términos de submatrices \mathbf{s}_{lm} de 2×2 o 3×3

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} & \mathbf{s}_{12} & \cdots & \mathbf{s}_{1n} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{s}_{n1} & & & \mathbf{s}_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Donde, para $l = m$,

$$\mathbf{s}_{ll} = \hat{t}_l \mathbf{I}$$

y \hat{t}_l es la suma de los coeficientes de tensión de todos los elementos que se conectan al nodo l , y para $l \neq m$,

$$\mathbf{s}_{lm} = -\hat{t}_{lm} \mathbf{I}$$

En donde n es el número de nodos libres y \hat{t}_{lm} es igual al coeficiente de tensión en el elemento que conecta los nodos l y m si los nodos están conectados por un elemento o es cero si no lo están.

7.2 ANEXO B: Determinación de la Carga de Viento por el Procedimiento Direccional

El capítulo 27 del Estandar ASCE 7-10 (ASCE, 2010) presenta el Procedimiento Direccional para la determinación de cargas de viento en edificios abiertos, cerrados y parcialmente cerrados. En el presente anexo se exponen los pasos y parámetros necesarios para la determinación de la carga de viento por este procedimiento, junto con referencias a las secciones, tablas y figuras del ASCE 7-10 en las que se encuentra la descripción detallada de cada parámetro. Junto con la descripción de los pasos se definirán los parámetros que se eligieron para la determinación de la carga de viento a la que se sometió la estructura de cubierta en tensegridad objetivo del presente trabajo.

Paso 1: Determinar la categoría de riesgo de la estructura.

Las categorías de riesgo se exponen en la tabla 1.5-1 del ASCE 7-10. Para el presente trabajo se eligió la categoría II.

Paso 2: Determinar la velocidad básica del viento v .

La velocidad básica del viento es la velocidad máxima de ráfaga registrada a una altura de 10 metros sobre el suelo en un intervalo de 3 segundos. La NEC sugiere que este valor debe tomarse de por lo menos $v = 21\text{m/s}$. Asumiremos este valor en el presente documento.

Paso 3: Determinar los parámetros de carga de viento:

- Factor de direccionalidad del viento K_d , tabla 26.6-1. $K_d = 0.85$ para techos arqueados.
- Categoría de exposición de la estructura, sección 26.7. Para la cubierta tensegrítica: categoría C.
- Factor topográfico K_{zt} , sección 26.8. En este caso se determinó un factor de $K_{zt} = 1.464$ que refleja condiciones topográficas desfavorables para la estructura.
- Factor de ráfaga G_f , sección 26.9. $G_f = 0.85$.
- Clasificación de encierro, se considerara la estructura como parcialmente cerrada.
- Coeficiente de presión interna GC_{pi} , para estructuras parcialmente cerradas $GC_{pi} = \pm 0.55$

Paso 4: Determinar el coeficiente de exposición a la presión de velocidad K_h , en la tabla 27.3-1 este factor se determina en función de la altura promedio h de la cubierta. Para el presente estudio se asumió un valor de $h = 40.33\text{m}$ según la disposición mostrada en la figura B.1. Para dicho valor de altura promedio se determina en la tabla 27.3-1 que $K_h = 1.36$

Paso 5: Determinar la presión de velocidad q_h , ecuación 27.3-1 en el ASCE 7-10 ecuación (B.1).

$$q_h = 0.613K_hK_{zt}K_dv^2 \text{ con } q_h \text{ en } N/m^2 \text{ y } v \text{ en } m/s \quad (B.1)$$

Con los parámetros definidos para la estructura del presente trabajo se tiene $q_h = 457.5 N/m^2$.

Paso 6: Determinar el coeficiente de presión externa C_p , en la figura 27.4-2 para domos, se encuentra este valor en función de los parámetros mostrados en la figura B.1.

De la figura B.2 se determinó que $C_{pA} = -0.9$, $C_{pB} = -0.7$ y $C_{pC} = -0.3$ para los puntos A, B y C respectivamente.

Paso 7: Calcular la presión de viento p en las superficies de la estructura. La ecuación 27.4-2 (B.2) se aplica para estructuras flexibles.

$$p = qG_fC_p - q_i(GC_{pi}) \text{ en } N/m^2 \quad (B.2)$$

Para el caso de cubiertas $q = q_i = q_h$. Entonces las presiones p_A , p_B y p_C sobre las superficies en los puntos A, B y C respectivamente, considerando los dos casos de presión interna (positiva y negativa), son las mostradas en las tablas B.1 y B.2.

Presión interna positiva, $GC_{pi} = 0.55$:

Tabla B.1 Presión de viento sobre la estructura para el caso de presión interna positiva.

p_A (N/m^2)	p_B (N/m^2)	p_C (N/m^2)
-602	-524	-368

Presión interna negativa, $GC_{pi} = -0.55$:

Tabla B.2 Presión de viento sobre la estructura para el caso de presión interna negativa.

p_A (N/m^2)	p_B (N/m^2)	p_C (N/m^2)
-98	-21	135

el signo positivo indica que la presión es hacia las superficies y el negativo indica succión. Entonces en el caso de presión interna positiva, ambas presiones, interna y externa, tienden a levantar la superficie de la cubierta.

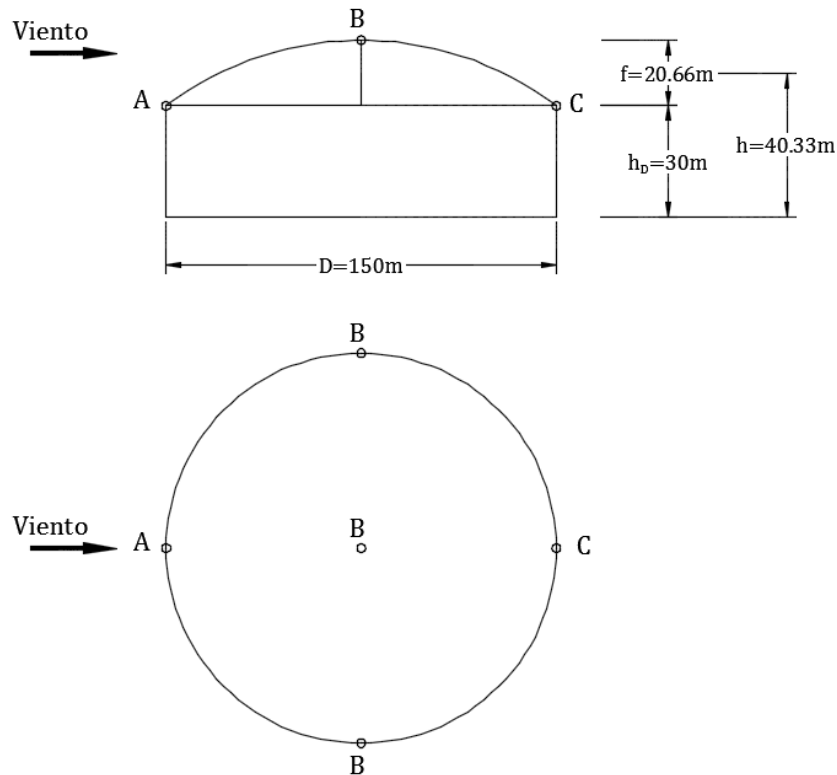
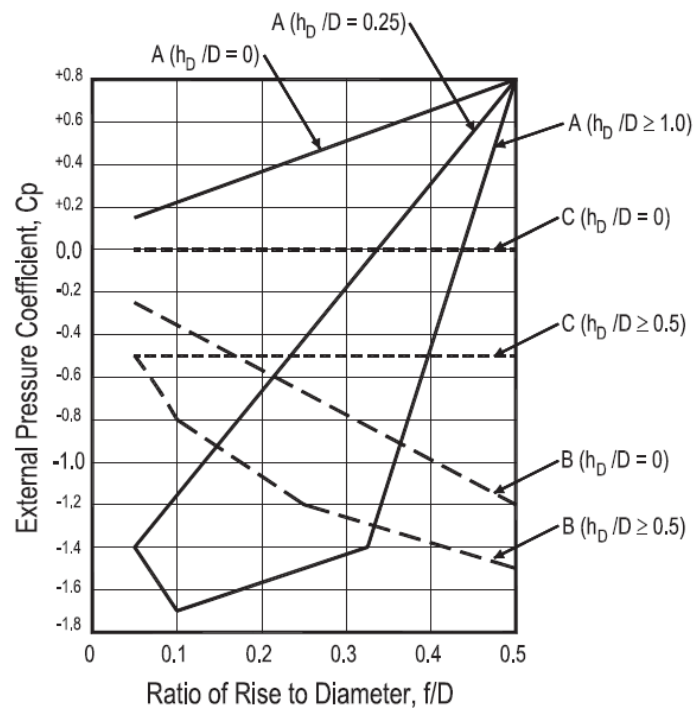


Figura B.1: Parámetros geométricos para la determinación del coeficiente de presión externa para domos de base circular.



External Pressure Coefficients for Domes with a Circular Base.

Figura B.2: Figura 27.4-2 del ASCE 7-10 para la determinación de los coeficientes de presión externa de domos con base circular.

7.3 ANEXO C: Programa en Matlab Para la Determinación de la Distribución de Pretensado Mediante el Método de la Doble Descomposición en Valores Singulares.

Algoritmo C.1 Implementación del método de la Doble Descomposición en Valores Singulares.

```
%
% UNIVERSIDAD DE CUENCA
% FACULTAD DE INGENIERÍA
% ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
%IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE LA DOBLE DESCOMPOSICIÓN EN VALORES
% SINGULARES PARA LA DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRETENSADO DE
% UN ENSAMBLAJE RETICULAR TRIDIMENSIONAL.

function[W]=mautoesfuerzo()%W Modo de Pretensado Integral

%U,S,V descomposición en valores singulares de la matriz de
%equilibrio A, A=U*S*V'
%
[TB]=xlsread('tablas.xlsx',1); %crea una matriz con el contenido de
% la tabla de conexiones los grupos de
% simetría deben estar ordenados de
% menor a mayor
[TC]=xlsread('tablas.xlsx',2); %crea una matriz con el contenido de
% la tabla de coordenadas
[TL]=xlsread('tablas.xlsx',3); %crea un vector con los nodos libres
%
A=ensambla(TB,TC,TL); %Subrutina que ensambla la matriz de
% equilibrio, Algoritmo C.2.
[U,S,V] = svd(A); %Descomposición en Valores Singulares
% de la matriz de equilibrio.
[m,n]=size(S);
i=0;
%Se fija una tolerancia sobre los valores singulares para
%considerarlos nulos cuando su valor sea muy pequeño:
while S(n-i,n-i)<0.00001;
    T(1:n,i+1)=V(1:n,n-i);%Se forma la matriz T del método cuyas
    % columnas son los modos de pretensado
    % independiente.
    i=i+1;
end
%
W=mautoesfuerzofac(T,TB); %Subrutina que encuentra los
% Modos de Pretensado Integral.
% W es una matriz cuyas columnas son los
% Modos de Pretensado Integral,
% Algoritmo C.3.
graf(TB,TC,W); %Si W tiene un solo vector esta subrutina grafica la
% estructura mostrando la distribución de pretensado,
% Algoritmo C.4.
```

Algoritmo C.2 Subrutina que ensambla la matriz de equilibrio A.

```
function [A]=ensambla(TB,TC,TL)
%Esta función ensambla la matriz de equilibrio
%A matriz de equilibrio
%TB tabla de conexiones de las barras
%TL vector de nodos libres
%
TB=lonrig(TB,TC); %cálculo de la longitud de las barras
u=unitr(TB,TC); %Subrutina que calcula los vectores unitarios en
%               dirección de las barras.
%               u matriz de vectores unitarios en dirección de las
%               barras.
[c,d]=size(TB);
e=length(TL);
P=zeros(c,3*e); %creamos una matriz de ceros de la dimensión de A
transpuesta.
%Ensamblaje de la matriz de continuidad P:
for i=1:c;
    for j=1:e;
        if ((TB(i,2)==TL(j)) | (TB(i,3)==TL(j)));
            if (TB(i,2)==TL(j));
                P(i,((3*j)-2))=-u(i,1); P(i,(3*j)-1)=-
u(i,2); P(i,(3*j))=-u(i,3);
            else
                P(i,((3*j)-2))=u(i,1); P(i,(3*j)-
1)=u(i,2); P(i,(3*j))=u(i,3);
            end
        end
    end
end
A=P';
```

Algoritmo C.3 Subrutina que encuentra los Modos de Pretensado Integral.

```
function [W]=mautoesfuerzofac(T,TB)
%Esta función encuentra los Modos de Pretensado Integral
[b,s]=size(T);
n=max(TB(:,4)); %Se establece el número de grupos de simetría.
E=zeros(b,s); %Esta matriz contendrá los vectores -e del método.
i=1;
j=1;
for k=1:n; %Ensamblaje de los vectores -e del método.
    while (TB(j,4)-k)==0;
        E(j,i)=-1;
        j=j+1;
        if j==b+1;
            j=1;
        end
    end
    i=i+1;
end
X=[T E]; %X es igual a la matriz T del método.
[U,S,V]=svd(X); %Segunda Descomposición en Valores Singulares.
[o,p]=size(S);
l=0;
while S(p-1,p-1)<0.0001; %Selección de los Modos de Pretensado
    Y(1:n,l+1)=V(s+1:s+n,p-1); %Integral de entre las matrices de la
```




```
W=Y./Y(1,l+1); %descomposición.
l=l+1;
end
```

Algoritmo C.4 Subrutina que grafica la estructura mostrando la distribución de pretensado.

```
function []=graf(TB,TC,W)
%Esta función grafica la estructura mostrando la distribución de
pretensado.
%TB tabla de conexiones de las barras
%TC tabla de coordenadas de los nodos
%W modo de autoesfuerzo independiente, normalizado para el primer
elemento
[b,n]=size(TB);
%CONFIGURACIÓN DE LOS LÍMITES DE LA VENTANA GRÁFICA
dx=(max(TC(:,2))-min(TC(:,2)))/10;
dy=(max(TC(:,3))-min(TC(:,3)))/10;
dz=(max(TC(:,4))-min(TC(:,4)))/10;
xmin=min(TC(:,2))-dx;
xmax=max(TC(:,2))+dx;
ymin=min(TC(:,3))-dy;
ymax=max(TC(:,3))+dy;
zmin=min(TC(:,4))-dz;
zmax=max(TC(:,4))+dz;
%GRAFICO DE LA ESTRUCTURA
title('MODO DE PRETENSADO','fontsize',20,'linewidth',0.7)
text((xmax-0.5*dx),(ymax-
3*dy),'TRACCIÓN','color','w','backgroundcolor','b','linewidth',0.7);
text((xmax-0.5*dx),(ymax-
4*dy),'COMPRESIÓN','color','w','backgroundcolor','r','linewidth',0.7);
for i=1:b;
x=[TC(TB(i,2),2),TC(TB(i,3),2)];
y=[TC(TB(i,2),3),TC(TB(i,3),3)];
z=[TC(TB(i,2),4),TC(TB(i,3),4)];
hold on;
grid on;
axis([xmin xmax ymin ymax zmin zmax]);
if W(TB(i,4))<0.00001&W(TB(i,4))>-0.00001;
plot3(x,y,z,'k','linewidth',2);
elseif W(TB(i,4))>0;
g=round(abs(W(TB(i,4))*10)); %Grosor de línea proporcional
if g==0; %al valor de distribución
g=0.5;
end;
plot3(x,y,z,'b','linewidth',g);
elseif W(TB(i,4))<0;
g=round(abs(W(TB(i,4))*10)); %Grosor de línea proporcional
if g==0; %al valor de distribución
g=0.5;
end;
plot3(x,y,z,'r','linewidth',g);
end
end
axis equal;
```